Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Harmadik gyakorlat, 2024. szeptember 24.

1. A tanult Euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg az összes olyan egészt 0 és 301 között, aminek a 222-szerese 34 maradékot ad 302-vel osztva. (ZH, 2022. október 18.)

2. Mennyi maradékot ad 539-cel osztva 499^{4201}? (ZH, 2023. november 17.)

---

3. Milyen maradékot ad
a) $2021^{2021} - 2021^{101}$ 600-zal osztva; (ZH, 2021. október 28.)
b) 39^{1200} 26-tal osztva;
c) $46^{47^{48}}$ 25-tel osztva? (ZH, 2014. április 24.)

4. Hány olyan 504-nél nem nagyobb, pozitív egész szám van, amelynek van 504-gyel osztva 1 maradékot adó többszöröse? (ZH, 2019. december 16.)

5. Létezik-e olyan n egész szám, amelyre $n^4 + 1$ osztható 101-gyel? (ZH, 2019. december 16.)

6. Adjuk meg 1024 összes cinkosát (vagyis az összes olyan 1024-nél kisebb, pozitív egészt, amik a Fermat-teszt végrehajtásakor nem tanúsítják 1024 összetett voltát). (ZH, 2023. november 3.)

7. Létezik-e páros Carmichael-szám? (ZH, 2017. október 19.)

8. Milyen maradékot ad $100^{3^{2011}}$ 3^{2011}-nel osztva? (ZH, 2011. április 21.)

---

9. Az előadáson tanult megfelelő algoritmusok alkalmazásával oldjuk meg az alábbi feladatokat. A megoldáshoz (kivételesen) használjunk számológépet.
a) Milyen maradékot ad 5^{300} 623-mal osztva?
b) Mi 352 és 155 legnagyobb közös osztója?
c) Mely x egészekre teljesül a $122x \equiv 5 \pmod{166}$ kongruencia?
d) Mely x egészekre teljesül a $122x \equiv 6 \pmod{166}$ kongruencia?

10. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
a) $49^{49^{50}}$
b) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$ (ZH, 2003. május 22.)

11. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)

12. Döntsük el az alábbi számokról, hogy 165-nek árulója, cinkosa vagy egyik sem. (A megoldáshoz használjunk számológépet és a megfelelő, tanult algoritmusokat.)
a) 13 b) 23 c) 33

13. – Mi legyen ebédre?
– Hát, mondjuk…
– Vigyázz, az ellenség lehallgatja a beszélgetést! Használd a $C : x \mapsto x^{11} \pmod{51}$ kódoló függvényt úgy, hogy az angol ábécé betűit sorban a 1, 2, …, 26 számokkal helyettesíted!
– Mármint…
– Ne értetlenkedj! `A` = 1, `B` = 2, `C` = 3, satöbbi, végül `Z` = 26. Ékezeteket ne használj és ne törődj azzal, hogy 50-ig a többi számnak már nincs jelentése. Szóval mi legyen a kaja?
– 2, 1, 6.
Határozzuk meg a C-hez tartozó D dekódoló függvényt és fejtsük meg vele, hogy mi lesz az ebéd.

14. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan x egész szám, melyre $x^6 \equiv 2 \pmod{201}$. (ZH, 2023. november 17.)

15. Bizonyítsuk be, hogy ha a egy 11-gyel nem osztható egész szám, akkor az $x^3 \equiv a \pmod{121}$ kongruencia megoldható (vagyis létezik olyan x egész, amelyre a kongruencia fennáll). (ZH, 2009. április 24.)

16. Definiáljuk a $\gamma(m)$ függvényt: $\gamma(m) = [p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}, p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}, \ldots, p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}]$, ahol az $m > 1$ egész prímtényezős felbontása $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (és a [ ] a legkisebb közös többszöröst jelöli). Bizonyítsuk be az Euler-Fermat tétel következő élesítését: ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\gamma(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

17. Mutassuk meg, hogy $n | \varphi(k^n - 1)$ igaz minden $k, n \geq 1$ egészekre.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy p prím osztója $2^{2^n} + 1$-nek, akkor $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

19. Egy n egész minden d pozitív osztójára kiszámoljuk $\varphi(d)$ értékét és a kapott számokat összeadjuk. Mit kapunk?

20*. Minden m pozitív egészre határozzuk meg az m-nél kisebb, m-hez relatív prím pozitív egészek szorzatának m szerinti osztási maradékát.