BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
HARMADIK GYAKORLAT, 2023. szeptember 26.

1. Milyen maradékot ad 4^{444} 363-mal osztva? (ZH, 2018. október 18.)

2. Az alábbi két C kód közül az első a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott n pozitív egész négyzetét számítja ki, a második pedig az n számjegyeinek az összegét. Tegyük fel, hogy a kódok végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az (alsó tagozatban tanult) „írásbeli” műveletek segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárások polinomiálisak-e. (A `floor(n/10.0)` az $\frac{n}{10}$ alsó egészrészét adja vissza.) (ZH, 2018. október 18., 2018. december 17.)

a)
```
x = n; y = 0;
while (x > 0) {
   x = x-1;
   y = y+n;
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

b)
```
x = 0; y = 0;
while (n > 0) {
   x = floor(n/10.0);
   y = y+n-10*x;
   n = x;
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

---

3. Egy képzeletbeli A algoritmus bemenete egy tízes számrendszerben megadott m pozitív egészből áll. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.

a) Ha minden m bemenet esetén A legföljebb $5m^2$ lépés után megáll, akkor A polinomiális algoritmus.

b) Ha minden m bemenet esetén A legföljebb $100 \cdot (\log_3 m)^5$ lépés után megáll, akkor A polinomiális algoritmus.

c) Ha minden m esetén A legalább m lépést tesz, akkor A biztosan nem polinomiális algoritmus.

d) Ha van olyan m, amire A legalább m lépést tesz, akkor A biztosan nem polinomiális algoritmus.

e) Ha minden páros m-re A legalább m lépést tesz, akkor A biztosan nem polinomiális algoritmus.

4. Milyen maradékot ad

a) $2021^{2021} - 2021^{101}$ 600-zal osztva; (ZH, 2021. október 28.)

b) $46^{47^{48}}$ 25-tel osztva; (ZH, 2014. április 24.)

c) 39^{1200} 26-tal osztva;

d) $\underbrace{111\ldots1}_{43 \text{ db 1-es}}$ 43-mal osztva?

5. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)

6. Létezik-e olyan n egész szám, amelyre $n^4 + 1$ osztható 101-gyel? (ZH, 2019. december 16.)

---

7. Az alábbi C kódok közül az első $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$-t, a második $\lfloor\log_2 n\rfloor$-t számítja ki bármely bemenetként (10-es számrendszerben) kapott $n > 0$ egész esetén (ahol a $\lfloor\ \rfloor$ alsó egészrészt jelöl). Tegyük fel, hogy a kódok végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az (alsó tagozatban tanult) „írásbeli” összeadás, szorzás, stb. segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárások polinomiálisak-e.

a)
```
x = 0; y = 0;
while (y <= n) {
   x = x+1;
   y = x*x;
}
printf("Eredmény: %d", x-1);
```

b)
```
x = 0; y = 1;
while (y <= n) {
   x = x+1;
   y = 2*y;
}
printf("Eredmény: %d", x-1);
```

8. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a) 159^{161}; b) $49^{49^{50}}$; c) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$; (ZH, 2003. május 22.)

d) a (10-es számrendszerben felírt) $42^{41^{40}}$ számnak a 11-es számrendszerben? (ZH, 2013. május 16.)

9. Az előadáson tanult megfelelő algoritmusok alkalmazásával oldjuk meg az alábbi feladatokat. A megoldáshoz (kivételesen) használjunk számológépet.

a) Milyen maradékot ad 5^{300} 623-mal osztva?

b) Mi 352 és 155 legnagyobb közös osztója?

c) Mely x egészekre teljesül a $122x \equiv 5 \pmod{166}$ kongruencia?

d) Mely x egészekre teljesül a $122x \equiv 6 \pmod{166}$ kongruencia?

10. Legyen $n = 200704261601$. Határozzuk meg n^n utolsó három számjegyét. (ZH, 2007. április 26.)

11. Igaz-e, hogy ha az a és b egész számokra $a^{40} \not\equiv b^{40} \pmod{100}$, akkor $a^{40}b^{40} \not\equiv 1 \pmod{100}$? (ZH, 2021. december 13.)