Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Második gyakorlat, 2024. szeptember 10.

1. a) Mennyi maradékot adhat 273-mal osztva egy olyan szám, melynek 57-szerese 99 maradékot ad 273-mal osztva? (ZH, 2022. november 4.)

b) Egy x egész szám 12-szerese 3-mal nagyobb maradékot ad 86-tal osztva, mint maga az x szám. Milyen maradékot adhat x 86-tal osztva?

c) Adjuk meg az összes olyan n egész számot, amire $52n + 3$ és $n + 7$ azonos maradékot ad 85-tel osztva.

2. Mely egész számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 2, 9-cel osztva 3 maradékot adnak?

---

3. a) Egy n egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az n szám. Milyen maradékot adhat n 344-gyel osztva? (ZH, 2017. október 19.)

b) Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy? (ZH, 2014. november 27.)

4. a) Határozzuk meg az összes olyan n egészt 1 és 1000 között, amelyre $n + 10$ 36-tal osztva, $n - 10$ pedig 38-cal osztva ad 1 maradékot. (ZH, 2019. december 16.)

b) Hány olyan egész szám van 1 és 2021 között, melyre teljesül, hogy 63-mal osztva 18, 91-gyel osztva pedig 34 maradékot ad? (ZH, 2021. december 13.)

5. Egy n egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az n szám 182-vel osztva? (ZH, 2013. április 25.)

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c, d, e, f egész számokra $(a + b, c + d, e + f) \mid ace + bdf$ teljesül.

7. Tegyük fel, hogy az n és m pozitív egészekre szerkeszthető (körzővel és vonalzóval) szabályos n-szög és szabályos m-szög is. Mutassuk meg, hogy ekkor szabályos $[n, m]$-szög is szerkeszthető.

---

8. Mennyi maradékot ad $6 \cdot 10^{23}$ 9998-cal osztva? (ZH, 2023. november 3.)

9. a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsuk be, hogy elszámolta magát.

c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?

10. a) Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva? (ZH, 2020. október 30.)

b) Milyen maradékot adhat az n egész szám 202-vel osztva, ha $53n - 1$ osztható 202-vel? (ZH, 2011. május 17.)

c) Egy egész számra teljesül, hogy $37n + 9$ és $n + 10$ azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék? (ZH, 2013. május 16.)

11. Az n pozitív egész utolsó két számjegye a 4-es és az 5-ös számrendszerben is 11. Mi n utolsó két számjegye a 10-es számrendszerben? (ZH, 2019. október 25.)

12. Egy n egész szám 100-zal vett osztási maradéka 1-gyel nagyobb a 73-mal vett osztási maradékánál. Mennyivel nagyobb a 7300-zal vett osztási maradéka a 73-mal vett osztási maradékánál? (ZH, 2022. december 19.)

13. Létezik-e 100 szomszédos egész szám úgy, hogy mindegyikük osztható egy 1-nél nagyobb egész szám 10-edik hatványával?

14. Határozzuk meg az összes olyan n egészt, amelyre $5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$ teljesül. (ZH, 2005. május 5.)

15. a) Milyen n egészek írhatók fel $n = 170x + 51y$ alakban (ahol x és y persze egész számok)?

b) Általánosítsunk: ha adottak az a és b egészek, milyen n egészek írhatók fel $n = ax + by$ alakban?

c) Általánosítsunk tovább: ha adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egészek, milyen n egészek írhatók fel $n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$ alakban?

16. A múlt század második felében, főleg a digitális számológépek elterjedése előtt nagyon népszerűek voltak Pataki Ferenc fejszámolóművész műsorai. Az egyik kedvelt trükkje volt a következő: felkért valakit a közönségből, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnánk-e csinálni, ha használhatunk számológépet, de csak nagyon rövid ideig?

17. Wilson nevezetes tétele szerint $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ teljesül minden p prímszámra. Bizonyítsuk be ezt a tételt a következő ötlet alapján: ha $p > 3$ prím, akkor szeretnénk párbaállítani a $2, 3, \ldots, p - 2$ számokat úgy, hogy a párok tagjainak szorzata mindig 1 maradékot adjon p-vel osztva.