

1. a) Mennyi maradékot adhat 273-mal osztva egy olyan szám, melynek 57-szerese 99 maradékot ad 273-mal osztva? (ZH, 2022. november 4.)

b) Egy  $x$  egész szám 12-szerese 3-mal nagyobb maradékot ad 86-tal osztva, mint maga az  $x$  szám. Milyen maradékot adhat  $x$  86-tal osztva?

c) Adjuk meg az összes olyan  $n$  egész számot, amire  $52n + 3$  és  $n + 7$  azonos maradékot ad 85-tel osztva.

2. Mely egész számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 2, 9-cel osztva 3 maradékot adnak?

---

3. a) Egy  $n$  egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az  $n$  szám. Milyen maradékot adhat  $n$  344-gyel osztva? (ZH, 2017. október 19.)

b) Az  $n$  pozitív egész számra  $43n - 1$  utolsó két számjegye megegyezik  $2n + 2$  utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy? (ZH, 2014. november 27.)

4. a) Határozzuk meg az összes olyan  $n$  egészt 1 és 1000 között, amelyre  $n + 10$  36-tal osztva,  $n - 10$  pedig 38-cal osztva ad 1 maradékot. (ZH, 2019. december 16.)

b) Hány olyan egész szám van 1 és 2021 között, melyre teljesül, hogy 63-mal osztva 18, 91-gyel osztva pedig 34 maradékot ad? (ZH, 2021. december 13.)

5. Egy  $n$  egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az  $n$  szám 182-vel osztva? (ZH, 2013. április 25.)

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $a, b, c, d, e, f$  egész számokra  $(a + b, c + d, e + f) \mid ace + bdf$  teljesül.

7. Tegyük fel, hogy az  $n$  és  $m$  pozitív egészekre szerkeszthető (közövel és vonalzóval) szabályos  $n$ -szög és szabályos  $m$ -szög is. Mutassuk meg, hogy ekkor szabályos  $[n, m]$ -szög is szerkeszthető.

---

8. a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsuk be, hogy elszámolta magát.

c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?

9. a) Mely 1 és 111 közötti egész számok 1111-szerese ad 11 maradékot 2020-szal osztva? (ZH, 2020. október 30.)

b) Milyen maradékot adhat az  $n$  egész szám 202-vel osztva, ha  $53n - 1$  osztható 202-vel? (ZH, 2011. május 17.)

c) Egy egész számra teljesül, hogy  $37n + 9$  és  $n + 10$  azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék? (ZH, 2013. május 16.)

10. Hány olyan egész szám van 1 és 10 000 között, aminek az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) 34 és a hexadecimális alakjának az utolsó jegye E? (A hexadecimális számrendszerben az E a 14-es számjegyet jelöli.) (ZH, 2022. október 18.)

11. Egy  $n$  egész szám 100-zal vett osztási maradéka 1-gyel nagyobb a 73-mal vett osztási maradékánál. Mennyivel nagyobb a 7300-zal vett osztási maradéka a 73-mal vett osztási maradékánál? (ZH, 2022. december 19.)

12. Határozzuk meg az összes olyan  $n$  egészt, amelyre  $5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$  teljesül. (ZH, 2005. május 5.)

13.a) Milyen  $n$  egészek írhatók fel  $n = 170x + 51y$  alakban (ahol  $x$  és  $y$  persze egész számok)?

b) Általánosítsunk: ha adottak az  $a$  és  $b$  egészek, milyen  $n$  egészek írhatók fel  $n = ax + by$  alakban?

c) Általánosítsunk tovább: ha adottak az  $a_1, a_2, \dots, a_k$  egészek, milyen  $n$  egészek írhatók fel  $n = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$  alakban?

14. A múlt század második felében, főleg a digitális számológépek elterjedése előtt nagyon népszerűek voltak Pataki Ferenc fejszámológépművész műsorai. Az egyik kedvelt trükkje volt a következő: felkért valakit a közönségből, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnánk-e csinálni, ha használhatunk számológépet, de csak nagyon rövid ideig?

15. Wilson nevezetes tétele szerint  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$  teljesül minden  $p$  prímszámra. Bizonyítsuk be ezt a tételt a következő ötlet alapján: ha  $p > 3$  prím, akkor szeretnénk párbaállítani a  $2, 3, \dots, p - 2$  számokat úgy, hogy a párok tagjainak szorzata mindig 1 maradékot adjon  $p$ -vel osztva.

16. Mutassuk meg, hogy végtelen sok, 4-gyel osztva 3 maradékot adó prímszám van.