Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Első gyakorlat, 2024. szeptember 3.

1. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$
b) $4567890 \equiv -135790 \pmod{100}$
c) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$

---

2. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $110110101_{2} \equiv 1000101101_{2} \pmod{8}$
b) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$

3. Vizsgáljuk meg az alábbi „műveleti szabályokat”: melyek ezek közül azok, amik valóban teljesülnek minden szóba jövő esetben? Ahol ez nem igaz, ott vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a szabály legalább abban a speciális esetben, ha $(m, c) = 1$. (A változók természetesen mind egész számokat jelölnek.)
a) Ha $a \equiv b \quad (m)$, akkor $a + c \equiv b + c \quad (m)$.
b) Ha $a + c \equiv b + c \quad (m)$, akkor $a \equiv b \quad (m)$.
c) Ha $a \equiv b \quad (m)$, akkor $ac \equiv bc \quad (m)$.
d) Ha $ac \equiv bc \quad (m)$, akkor $a \equiv b \quad (m)$.
e) Ha $a \equiv b \quad (m)$, akkor $a^c \equiv b^c \quad (m)$ (ahol $c \geq 0$).
f) Ha $a \equiv b \quad (m)$, akkor $c^a \equiv c^b \quad (m)$ (ahol $a, b \geq 0$).

4. A **3.** feladatban igaznak bizonyult műveleti szabályok segítségével válaszoljuk meg a következő kérdéseket. Milyen maradékot ad
a) 70^{70} 23-mal osztva;
b) 55^{100} 48-cal osztva?

5. Tegyük fel, hogy adottak az a, b és m egész számok, amikre $(a, m) = 1$ és $m > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $0, 1, \ldots, m-1$ számok között pontosan egy olyan x létezik, amire $ax \equiv b \quad (m)$ teljesül.

6. Valamely n pozitív egészre az $n^2 + 3n + 1$ és az $n^2 + 4n + 6$ számok nem relatív prímek. Határozzuk meg a legnagyobb közös osztójukat.

---

7. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?
a) $149 \equiv 139 \quad (m)$
b) $m + 13 \equiv m + 18 \quad (m)$
c) $7m + 9 \equiv m^2 + 9 \quad (m)$
d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \quad (m)$

8. Milyen maradékot ad
a) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;
b) 1025^{1005} 1023-mal osztva;
c) 138^{139} 65-tel osztva?

9. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra. (ZH, 2014. december 19.)
a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.
b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

10. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, aminek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

11. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.

12. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak? (ZH, 2000. május 4.)

13. Léteznek-e olyan k és n, $k \neq n$ természetes számok, amelyekre $2^k - 2^n$ osztható 53-mal?

14. Milyen maradékot ad $(n + 2) \cdot (n + 3) \cdot \ldots \cdot (2n)$ $n!$-sal osztva (ahol $n \geq 2$ egész)?

15. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok? (Vagyis: melyek azok a p prímek, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$?)

16. Mely természetes számoknak van olyan többszöröse, ami csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz?