

1. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$

b) $4567890 \equiv -135790 \pmod{100}$

c) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$

2. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $110110101_{(2)} \equiv 1000101101_{(2)} \pmod{8}$

b) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$

3. Vizsgáljuk meg az alábbi „műveleti szabályokat”: melyek ezek közül azok, amik valóban teljesülnek minden szóba jövő esetben? Ahol ez nem igaz, ott vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a szabály legalább abban a speciális esetben, ha $(m, c) = 1$. (A változók természetesen mind egész számokat jelölnek.)

a) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

b) Ha $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$.

c) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $ac \equiv bc \pmod{m}$.

d) Ha $ac \equiv bc \pmod{m}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$.

e) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $a^c \equiv b^c \pmod{m}$ (ahol $c \geq 0$).

f) Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $c^a \equiv c^b \pmod{m}$ (ahol $a, b \geq 0$).

4. A 3. feladatban igaznak bizonyult műveleti szabályok segítségével válaszoljuk meg a következő kérdéseket. Milyen maradékot ad

a) 70^{70} 23-mal osztva;

b) 55^{100} 48-cal osztva?

5. Tegyük fel, hogy adottak az a , b és m egész számok, amikre $(a, m) = 1$ és $m > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $0, 1, \dots, m - 1$ számok között pontosan egy olyan x létezik, amire $ax \equiv b \pmod{m}$ teljesül.

6. Valamely n pozitív egészre az $n^2 + 3n + 1$ és az $n^2 + 4n + 6$ számok nem relatív prímek. Határozzuk meg a legnagyobb közös osztójukat.

7. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?

a) $149 \equiv 139 \pmod{m}$

b) $m + 13 \equiv m + 18 \pmod{m}$

c) $7m + 9 \equiv m^2 + 9 \pmod{m}$

d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \pmod{m}$

8. Milyen maradékot ad

a) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;

b) 1025^{1005} 1023-mal osztva;

c) 138^{139} 65-tel osztva?

9. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra. (ZH, 2014. december 19.)

a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.

b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

10. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, aminek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

11.a) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.

12. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak? (ZH, 2000. május 4.)

13. Léteznek-e olyan k és n , $k \neq n$ természetes számok, amelyekre $2^k - 2^n$ osztható 53-mal?

14. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok? (Vagyis: melyek azok a p prímek, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$?)

15. Milyen maradékot ad $\binom{2n}{n}$ $(n + 1)$ -gyel osztva (ahol $n \geq 1$ egész)?

16. Mely természetes számoknak van olyan többszöröse, ami csak 0 és 1 számjegyet tartalmaz?