Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus

Tizenkettedik gyakorlat, 2024. december 3.

1. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1=(2;3)$ vektorhoz a $(2;5)$-öt, a $\underline{b}_2=(0;2)$-höz a $(2;1)$-et rendeli.
a) Adjuk meg f-nek az $[f]_B$ mátrixát a $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}$ bázis szerint.
b) Határozzuk meg α és β értékét, ha f az $\alpha\underline{b}_1+\underline{b}_2$ vektorhoz az $3\underline{b}_1+\beta\underline{b}_2$ vektort rendeli.
c) Adjuk meg f-nek az $[f]$ mátrixát.

2. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az $\underline{u}$, $\underline{v}$, illetve $\underline{w}$ vektorok?
b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\4&4&3\\2&2&0\end{pmatrix},\ \underline{u}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

---

3. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1+\underline{b}_3)=(10;20;30)$. (ZH, 2014. december 15.)

$$[f]_B=\begin{pmatrix}4&9&-4\\-6&5&8\\-7&3&7\end{pmatrix}$$

4. a) Sajátvektora-e a jobbra látható $\underline{v}$ vektor az A mátrixnak?
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort. (ZH, 2014. december 15.)

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}4&3&-5\\-2&-3&10\\1&3&-2\end{pmatrix}$$

5. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f:(x,y)\mapsto(2x+y,3x+4y)$. Van-e $\mathbb{R}^2$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

6. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben.
a) Mutassuk meg, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ mátrixok sajátértékei azonosak.
b) Igaz-e mindig, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n\times n$-es mátrixnak n különböző sajátértéke van, akkor
a) a sajátértékek szorzata a mátrix determinánsa;
b) a sajátértékek összege a mátrix főátlóbeli elemeinek összege (azaz *nyoma*).

---

8. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1=(1,0)$ és $\underline{b}_2=(1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. (≈ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix}3&1\\x&4\end{pmatrix}$$

9. Az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f:(x,y,z)\mapsto(0,3x+4y+z,6x+2y+5z)$. Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

10. Az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B=\{\underline{b}_1=(1;0;0),\ \underline{b}_2=(2;1;0),\ \underline{b}_3=(2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1)=\underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2)=\underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3)=\underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat. (ZH, 2014. november 27.)

11. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)
a) Mutassuk meg, hogy $\lambda=7$ sajátértéke A-nak.
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát. (ZH, 2011. december 5.)

12. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $n\times n$-es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ sajátvektora
a) A-nak; b) A^2-nek? (≈ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)

13. Előfordulhat-e, hogy egy $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixát két különböző bázisban felírva az alábbi eredményeket kapjuk?

a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

14. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_n\}$, illetve $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\dots,\underline{c}_n\}$ két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1+\underline{b}_2+\ldots+\underline{b}_n$ és $\underline{c}_1+\underline{c}_2+\ldots+\underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[f]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[f]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. (≈ZH, 2012. december 3.)

15. Írjuk fel az origót a $P(1;2;2)$ ponttal összekötő egyenes, mint tengely körüli, az origóból P felé nézve $+30°$-os elforgatás mátrixát. (Segítség: a $(2;10;-11)$ és a $(14;-5;-2)$ vektorok egyenlő hosszúak, merőlegesek egymásra és az $(1;2;2)$ vektorra is.)