Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus

Tizenegyedik gyakorlat, 2024. november 26.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a $\operatorname{Ker} f$ magteret és az $\operatorname{Im} f$ képteret, valamint ezek dimenzióját.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb.

---

2. Lineáris leképezések-e az alábbi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a $\operatorname{Ker} f$ magteret és az $\operatorname{Im} f$ képteret, valamint ezek dimenzióját.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $f(\underline{v})$ utolsó koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege, $f(\underline{v})$ többi koordinátája pedig megegyezik $\underline{v}$ megfelelő koordinátájával;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli;

c) $f : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$, minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^{100}$ és minden $1 \le i \le 100$ esetén $f(\underline{v})$ i-edik koordinátája a $\underline{v}$ első i koordinátájának összege.

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2, 6)$ vektorhoz a $(14, 16, 14)$ vektort, az $(1, -3)$ vektorhoz pedig az $(1, -10, -5)$ vektort rendeli.

a) Írjuk fel f mátrixát.

b) Mit rendel f a $(4, -1)$ vektorhoz?

c) A p paraméter milyen értékére teljesül a $(10, -9, p) \in \operatorname{Im} f$ állítás?

4. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli. (ZH, 2014. november 27.)

5. Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\mathbb{R}^m$-ben.

b) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} f$-ben.

c) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független rendszer, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ is lineárisan független rendszer.

d) Ha $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ lineárisan független rendszer, akkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ is lineárisan független rendszer.

6. Legyen $V \le \mathbb{R}^n$ altér és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ bázis V-ben. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, amelyre $f(\underline{x}) = [\underline{x}]_B$ teljesül minden $\underline{x} \in V$ esetén.

---

7. Az $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa látható jobbra. Határozzuk meg $\dim \operatorname{Im} f$ és $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét és adjunk meg egy-egy bázist az $\operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f$ alterekben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

8. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ és a $(3, 4)$ vektorhoz is az $(5, 6)$ vektort rendeli.

a) Írjuk fel f mátrixát.

b) Mit rendel f a $(99, 100)$ vektorhoz?

c) Igaz-e az $(55, 55) \in \operatorname{Im} f$ állítás?

d) Igaz-e az $(55, 55) \in \operatorname{Ker} f$ állítás?

9. Igazak-e az alábbi állítások minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációra?

a) Ha $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det[f] = 0$.

b) Ha $\det[f] = 0$, akkor $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

c) Ha $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$, akkor $[f]^2 = 0$.

d) Ha $[f]^2 = 0$, akkor $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$.

10. Legyen $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{10}$-ben megadható 7 lineárisan független vektor úgy, hogy f ezek mindegyikéhez azonos értéket rendel.

b) Igaz-e ez az állítás 7 helyett 8-cal? (ZH, 2014. december 15.)

11. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorok és $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \rangle \cap \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$, akkor az $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ vektorok is lineárisan függetlenek.

12. Mutassuk meg, hogy ha az $n \times n$-es A és B mátrixokra $A \cdot B = 0$ teljesül, akkor $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \le n$.

13. Legyenek $V \le \mathbb{R}^n$ és $W \le \mathbb{R}^m$ olyan alterek, amelyekre $\dim V + \dim W = n$. Igaz-e mindig, hogy ekkor létezik olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, amelyre $\operatorname{Ker} f = V$ és $\operatorname{Im} f = W$?

14*. Legyen $f : \mathbb{R}^{37} \to \mathbb{R}^{37}$ lineáris transzformáció és jelölje f^2 az $f \circ f$ transzformációt. Mennyi $\dim \operatorname{Ker} f$ lehetséges legkisebb értéke, ha $\dim \operatorname{Im} f^2 = 7$?