Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus

Tizenegyedik gyakorlat, 2024. november 19.

1. Döntsük el, van-e inverze az alábbi mátrixnak; ha igen, határozzuk is meg. (ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. A c valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját. (ZH, 2006. november 9.)

$$\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

---

3. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A és B mátrixok invertálhatók.

a) Mutassuk meg, hogy $A \cdot B$ is invertálható.

b) Hogyan lehetne kiszámítani $(A \cdot B)^{-1}$-et A^{-1} és B^{-1} segítségével?

4. Tegyük fel, hogy az A mátrix oszlopai közül kiválasztottunk k darabot úgy, hogy ezek az oszlopok lineárisan függetlenek, de bárhogy veszünk hozzájuk egy további oszlopot, a kapott $k+1$ oszlop már lineárisan összefüggő. Következik-e ebből, hogy $r(A) = k$?

5. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

6. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$. (ZH, 2014. november 27.)

7. Legyen V az $\mathbb{R}^k$ egy altere, C egy $k \times n$-es, A pedig egy $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V-beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$. (ZH, 2019. december 6.)

---

8. Határozzuk meg az $n \times n$-es A mátrix inverzét, ha minden $1 \leq i, j \leq n$-re

a) $a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{ha } i = j \text{ és } i \geq 2 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$

b) $a_{ij} = \min\{i, j\}$

9. A p paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját. (ZH, 2021. december 2.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli). (ZH, 2006. október 26.)

11. Határozzuk meg az $n \times n$-es A mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$. (E-vel az $n \times n$-es egységmátrixot jelöltük.) (ZH, 2002. december 10.)

12. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. (ZH, 2013. november 28., 2013. december 9.)

a) Mutassuk meg, hogy létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre $A \cdot B$ a 2×2-es egységmátrix.

b) Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre $B \cdot A$ a 3×3-as egységmátrix.

13. Az $n \times n$-es A mátrixra $A + A^2 + A^3 = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$ vagy $\det A = 1$. (ZH, 2023. december 1.)

14. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások fennállnak tetszőleges A és B mátrixokra (feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők rajtuk).

a) $\mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A)$

b) $\mathrm{r}(A + B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

15. Az $(n \times n)$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó.

(ZH, 2006. október 26.)

16. Bizonyítsuk be, hogy ha az A négyzetes mátrixra $A^k = 0$ valamely k-ra, akkor $(A - E)$-nek van inverze.

17. Bizonyítsuk be a determinánsok szorzástételének felhasználása nélkül a $\exists A^{-1} \Longrightarrow \det A \neq 0$ állítást.

18*. Egyszer a török szultán tömlöcbe vetett. A kezembe nyomott egy 100×100-as mátrixot és így szólt:

– Nem engedlek szabadon, amíg ennek a mátrixnak az inverzét ki nem számítod!

100 nap és 100 éjjel dolgoztam, végül a 101. nap reggelén büszkén jelentettem, hogy elkészültem. A török szultán egy pillantást vetett a munkámra, majd gonoszul felkacagott:

– A számolás hibátlan. Csak éppen rosszul másoltad le a feladatot! Ezt az egy elemet már a legelején elhibáztad, én mást adtam! – mutatott a szultán gyűrűkkel gazdagon díszített ujjával a mátrix egyik elemére. – Most kezdheted elölről! Bruhaha!

Keserű szívvel, de beláttam hogy a szultánnak igaza van. A 102. nap reggelén mégis kiszabadultam. Hogyan?

19*. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, amire $A^3 = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik egyetlen olyan $n \times n$-es X mátrix, amire a következő egyenlet teljesül: $X + AX + XA^2 = A$.