

A rendelkezésre álló idő: 90 perc.

Minden feladat egységesen 10 pontot ér. Az aláírás megszerzéséhez legalább 24 pont szükséges. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás(oka)t indokolni kell!

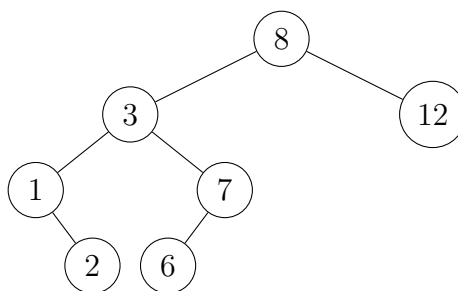
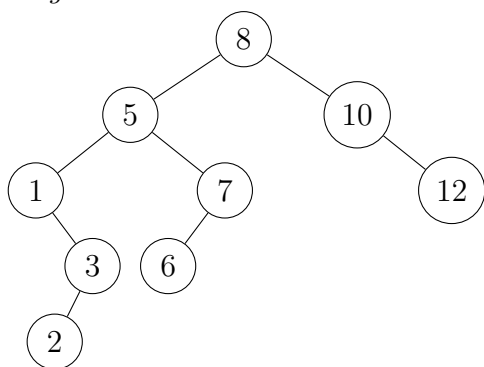
Kérjük, írja fel a **nevét**, **NEPTUN-kódját** és a **gyakorlatvezető nevét** az összetűzött lapok jobb felső sarkába.

Általános alapelvek. A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők. Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre. Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

Az első 3 feladatban az algoritmusok lépéseinek bemutatásán kívül nem várunk további indoklást.

1. Egy kezdetben üres bináris keresőfába sorban szúrja be a következő elemeket: 8, 5, 10, 1, 3, 7, 12, 6, 2
 - a) Rajzolja fel a fát az összes beszúrás elvégzése után.
(A köztes állapotokat nem muszáj felrajzolni.)
 - b) Végezze el a TÖRÖL(10) és TÖRÖL(5) műveleteket, majd ábrázolja a kapott fát.

Megoldás:

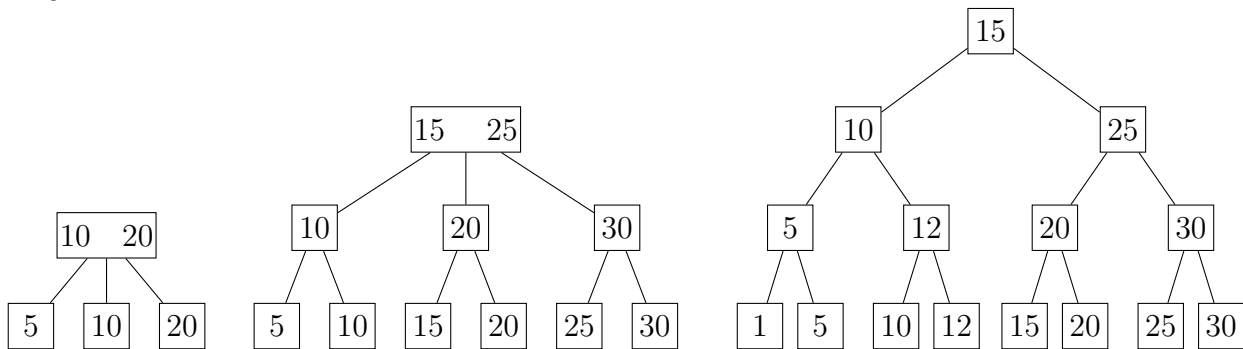


Pontozás: a) rész fája helyesen
b) jó törlések

6 pont
2+2 pont

2. Egy üres 2-3 fába szúrja be sorban a következő kulcsokat: 10, 20, 5, 15, 25, 30.
 - a) Rajzolja fel a fa állapotát a 10, 20, 5 beszúrása után és az összes beszúrás elvégzése után is.
(Ne feledkezzen meg a belső csúcsok irányjelzőiről sem.)
 - b) A kapott fába szúrja be még a 12 és 1 kulcsokat is, majd rajzolja fel a kapott fa állapotát.

Megoldás:



Pontozás: a) rész két fája helyesen

2+3 pont

b) végső fa

5 pont

Ha csak az irányjelzők rosszak legalább

6 pont

3. Nyitott címzésű hashelést használunk, a hash-tábla mérete $m = 11$, a hash-függvény pedig $h(k) = k \bmod 11$. Az ütközések kezelésére **kvadratikus próbát** alkalmazunk.

A tábla állapota jelenleg a következő ($a * a$ törölt jel):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22		46	*				30	41	53	

a) A **kvadratikus próba** esetén az x kulcs beszúrásakor mi próbasorozat általános alakja?

b) Illessze be a következő három kulcsot a hash-táblába: 35, 13, 74.

Minden beszúrás után ábrázolja a hash-tábla aktuális állapotát.

c) A kapott táblában végezze el a TÖRÖL(41) műveletet és ismét ábrázolja a hash-tábla aktuális állapotát.

Megoldás:

a) A kvadratikus próba próbasorozata: $h(x) + 1^2, -1^2, +2^2, -2^2, +3^2, \dots \pmod{11}$

2 pont

b) 1. Beszúrás: 35

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22		46	35				30	41	53	

2 pont

2. Beszúrás: 13

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	13	46	35				30	41	53	

2 pont

3. Beszúrás: 74

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	13	46	35	74			30	41	53	

2 pont

c) TÖRÖL(41) művelet

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	13	46	35	74			30	*	53	

2 pont

4. Lássuk be, hogy az alábbi eldöntési probléma **NP**-ben van.

Input: Összefüggő G gráf, k és ℓ egész számok, ahol $k \geq 2025$ és $\ell \geq 2025$

Kérdés: Létezik-e G -ben olyan k méretű teljes részgráf (klikk) és ℓ méretű független ponthalmaz, amelyeknek van közös csúcsa?

Megoldás: Jó tanú egy k méretű klikk és egy ℓ méretű független csúcsalmaz, aminek van közös pontja. 4 pont

Ez polinom méretű, hiszen nem nagyobbak, mint a gráf (elég azt mondani, hogy trivi) 1 pont

Ellenőrző algoritmus ellenőrzi, hogy

a teljes gráf teljes-e és részgráf-e 1 pont

a független csúcsalmaz független 1 pont

mindkettőben van 2025 csúcs 1 pont

van közös csúcs 1 pont

minden triviálisan megy polinom időben 1 pont

5. Adott egy T bináris fa. Azt akarjuk ellenőrizni, hogy T minden x csúcsára teljesül-e: x baloldali részfájának és x jobboldali részfájának magassága legfeljebb eggyel tér el egymástól.

Adjon erre $O(n)$ futásidejű algoritmust, ahol n a T fa csúcsainak száma.

Megoldás: Dinamikus programozást használunk, minden x csúcsra kiszámítjuk a részfa $m(x)$ magasságát. *Nem kell levonni, ha nem hivatkozik explicit a DP-re, de amúgy jó az eljárás.* 3 pont

(A levelekre $m(x) = 0$, *nem kell levonni, ha hiányzik.*)

postorder sorrendben haladunk 2 pont

egy új csúcsra ellenőrizzük, hogy a két gyerekre teljesül-e a feltétel,

azaz $|m(\text{bal}(x)) - m(\text{jobb}(x))| \leq 1$ (ha nem, megállunk) 2 pont

az új csúcsra $m(x) = \max(m(\text{bal}(x)), m(\text{jobb}(x))) + 1$ (képlet helyett a magyarázat is jó) 2 pont

a postorder lépésszáma $O(n)$, egy csúcsra konstans sok lépés 1 pont

6. Legyen a KBFÉL-SZÍN probléma a következő:

Input: Egy $2p$ csúcsú G gráf

Kérdés: Kiszínezhetők-e a G gráf csúcsai $p + 3$ színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapnak?

Adjon meg egy 3-SZÍN $\prec$ KBFÉL-SZÍN Karp-redukciót.

Megoldás: Legyen $f(G)$ az a gráf, amit a p pontú G gráfból úgy kapunk, hogy hozzáveszünk p új pontot, amik egy teljes gráfot alkotnak és mindegyiket hozzákötjük G minden pontjához (egy jó ábra is elég) 5 pont

Ez polinom időben számolható, hiszen $2p$ csúcs és legfeljebb $(2p)^2$ él lesz (elég azt mondani, hogy trivi) 1 pont

Ha G színezhető 3 színnel, akkor $f(G)$ minden új csúcsára használjunk külön színt, így $p + 3$ szín lesz. 2 pont

Ha $f(G)$ színezhető $p + 3$ színnel, akkor minden új csúcsnak különbözik a színe egymástól is és G pontjainak színétől is, így G csúcsaira csak 2 szín marad. 2 pont

7. Adjon polinomiális algoritmust a következő feladat eldöntésére:

Input: Egy N pozitív egész szám tízes számrendszerben felírva

Kérdés: Léteznek-e olyan $a \geq 2$ és $b \geq 2$ egész számok, hogy $a^b = N$?

Megoldás: Az input mérete $n = \lceil \log_{10}(N) \rceil$ (nem baj, ha nem pontos a kifejezés)

1 pont

Ha van ilyen b , akkor $b = \log_a(N) \leq \log_2(N) \leq c \cdot n$.

3 pont

Minden ilyen b -re külön eldöntjük, hogy van-e hozzá megfelelő a .

1 pont

Ezt a bináris kereséshez hasonlóan csináljuk, először kiszámoljuk pl., hogy $a_1 = N/2$ esetén a_1^b kisebb, vagy nagyobb N -nél, majd a válasz függvényében a bináris kereséshez hasonlóan folytatjuk.

(amúgy jobb becslés a_1 -re az N számjegyeinek számának $\log(10)/\log(2) < 3,33$ -szereése)

3 pont

Indoklás a lépésszámmra...

2 pont