

1. Az alábbi függvények közül melyikre igaz, hogy  $O(n^2)$ ?  
 $f_1(n) = 11n^2 + 100000$                        $f_2(n) = 8n^2 \log_2 n$                        $f_3(n) = 1,5n + 3\sqrt{n}$
2. Az alábbi pszeudokódban egy \* kiírása számít lépésnek. Mutassa meg, hogy a kód lépésszáma  $O(n^3)$ .  

```
for i = 0 to n-1:
  for j = i+1 to n:
    print j darab *
```
3. (a) Lássa be, hogy a buborékrendezés lépésszáma  $O(n^2)$  (ezt a rendező algoritmust Prog1-ből már tanulták, de itt láthatják a pszeudokódját ismét). Releváns lépésnek az összehasonlítás és a csere számít. Igaz-e, hogy az algoritmus lépésszáma  $O(n^3)$ ?  

```
ciklus i = n-től 2-ig:
  ciklus j = 1-től (i-1)-ig:
    ha A[j] > A[j+1]:
      csere A[j] és A[j+1]
  ciklus vége
ciklus vége
```

 (b) Lássa be, hogy a buborékrendezés lépésszáma  $\Omega(n^2)$ .  
 (c) Igaz-e, hogy a buborékrendezés lépésszáma  $\Theta(n^2)$ ?

4. Az alábbi függvényeket rendezze nagyságrend szerint nem csökkenő sorozatba: ha  $f_i$  után közvetlenül  $f_j$  következik a sorban, akkor  $f_i(n) \in O(f_j(n))$  teljesüljön!  
 $f_1(n) = 8n^3$                        $f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n$                        $f_3(n) = 2^{(\log_2 n)^2}$                        $f_4(n) = 1514n^2 \log_2 n$
5. Az  $A[1 : n]$  tömb (bináris keresést használó) beszúrásos rendezése  $n - 1$  körből áll: az  $i$ . körben ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) a már rendezett  $A[1 : i]$  tömbben megkeressük az  $A[i + 1]$  elem helyét bináris kereséssel, majd az  $A[i + 1]$  elemet szomszédos elemek cseréjével balra mozgatjuk addig, amíg a megtalált pozícióba nem érkezik. (a) Lássa be, hogy az algoritmus lépésszáma  $O(n^2)$ , releváns lépésnek az összehasonlítás és a csere számít. (b) Lássa be, hogy az algoritmus lépésszáma  $\Omega(n^2)$  és  $\Theta(n^2)$  is.
6. Tekintsük az  $f_1(n) = 1,5n!$  és  $f_2(n) = 200(n - 1)!$  függvényeket. Melyik igaz és melyik nem az alábbiak közül?  
 $f_1 \in O(f_2)$                        $f_2 \in O(f_1)$                        $f_1 \in \Omega(f_2)$                        $f_2 \in \Omega(f_1)$                        $f_1 \in \Theta(f_2)$                        $f_2 \in \Theta(f_1)$
7. Bizonyítsa be, hogy ha  $f_1, f_2, g_1, g_2$  pozitív értékészletű függvények és  $f_1(n) \in O(g_1(n))$  és  $f_2(n) \in O(g_2(n))$ , akkor  
 (a)  $f_1(n) + f_2(n) \in O(\max(g_1(n), g_2(n)))$     (b)  $f_1(n) \cdot f_2(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$ .
8. Adjon  $O$  becslést a következő függvényekre:  
 $(n^2 + 8)(n + 1)$                        $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$                        $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$                        $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

9. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk  $A$  és  $B$ . A maximális lépésszámot leíró függvényeket jelölje  $f_A$  és  $f_B$ . Tudjuk, hogy  $f_A(n) \in O(f_B(n))$ . Következik-e ebből, hogy  
 a)  $A$  minden bemeneten gyorsabb, mint  $B$ ?    b)  $A$  véges sok bemenet kivételével gyorsabb, mint  $B$ ?    c)  $A$  megfelelően nagy bemenetekre gyorsabb, mint  $B$ ?
10. Mely  $a, b > 1$  egész számokra teljesülnek az alábbiak?  
 $n^a \in O(n^b)$                        $2^{an} \in O(2^{bn})$                        $\log_a n \in O(\log_b n)$
11. Tegyük fel, hogy  $n$  2-hatvány. Bizonyítsuk be, hogy ahhoz, hogy  $n$  különböző számból a két legnagyobb elemet kiválasszuk,  $n + \log_2 n - 2$  összehasonlítás elégséges.
12. Az  $A[1 : n]$  tömb piros és zöld elemeket tartalmaz. Szeretnénk átrendezni úgy, hogy az egyszínű elemek folytonosan helyezkedjenek el (elől az összes piros, utána a zöldek vagy fordítva). Egy megengedett lépés két szomszédos tömbelem cseréje. Javasoljunk konstans szorzó erejéig optimális lépésszámú algoritmust.
13. Adott  $n$  chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás-e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chippek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely  $n$ -nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.