

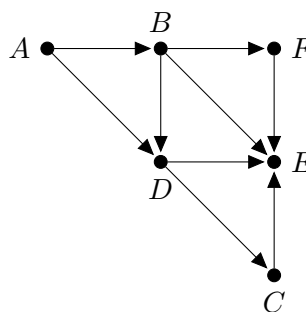
A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Alkalmos c konstans és n_0 küszöbérték megadásával lássa be, hogy $f(n) \in O(g(n))$ teljesül az alábbi függvényekre.

$$f(n) = 2023n^2 \cdot \log n - 27 \cdot \sqrt{n} \qquad g(n) = \frac{1}{10^{10}} \cdot n^3 + n \cdot \log n$$

2. Egy reklámkampányban n különféle módon tudunk embereket elérni. Ismert, hogy az egész kampányra legfeljebb M petákot tudunk költeni és a szóba jövő módszerek mindegyikéről tudjuk, hogy mennyibe kerül a megvalósítása (az i . módszer esetén ez p_i peták) és ismert az is, hogy melyik módszerrel hány embert tudunk elérni (e_i embert az i . módszerrel). Tegyük fel, hogy a különböző módszerekkel elérhető emberek halmaza páronként diszjunkt, azaz nincsen olyan ember, akit két módszerrel is el tudunk érni. Hogyan lehet meghatározni az M, p_1, p_2, \dots, p_n és e_1, e_2, \dots, e_n pozitív egész számok ismeretében $O(Mn)$ lépésben, hogy legfeljebb hány embert tudunk elérni legfeljebb M peták felhasználásával?

3. Az alábbi gráfban DFS-t (mélységi bejárást) futtatunk úgy, hogy az első három bejárt csúcs A, B, F ebben a sorrendben.



- (a) Milyen sorrendben jártuk be a többi csúcsot?
(b) Határozza meg a gráf összes csúcsára az ehhez a futáshoz tartozó befejezési számot.

4. Adott egy n -szer n -es táblázat, amelynek minden mezőjében egy pozitív egész szám áll, a számok között lehetnek egyformák. Ebben a táblázatban egy tetszőleges x számot tartalmazó mezőről egy vele közös oldallal rendelkező, $(x + 1)$ -et tartalmazó másik mezőre szabad lépni. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a leghosszabb (legtöbb lépésből álló) szabályos út hosszát a táblázatban.

5. Dijkstra algoritmusát futtatjuk egy **irányított** gráfon, ahol minden élsúly pozitív, az alábbi táblázat az $D[\]$ tömb változását mutatja a futás közben.

A	B	C	E	F	G
0	∞	9	∞	2	5
0	∞	5	7	2	3
0	8	4	5	2	3
0	7	4	5	2	3
0	6	4	5	2	3

- (a) Lehetséges-e, hogy van él az F csúcsból a B csúcsba? Ha lehetséges, akkor mi lehet ezen él súlya?
(b) Lehetséges-e, hogy van él a B csúcsból az F csúcsba? Ha lehetséges, akkor mi lehet ezen él súlya?

6. Mátrixával adott egy ország úthálózatának irányítatlan, élsúlyozott gráfja: a csúcsok a városok (n város van), az élek a városok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig az útszakasz megtételéhez szükséges várható időtartam. Az útszakaszoknak csak egy része ingyenes, az egy másik mátrixban adott, hogy mely szakaszokért kell fizetni.

Az A városból szeretnénk eljutni a B városba és arra vagyunk kíváncsiak, hogy tovább tart-e az út és ha igen, mennyivel, ha csak ingyenes szakaszokat használunk. Melyik tanult algoritmus (esetleg többszöri) alkalmazásával és hogyan lehet $O(n^2)$ lépésben megoldani ezt a feladatot?

7. Adott egy pozitív egész számokból álló a_1, a_2, \dots, a_n számsorozat. Ebben egy $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$ monoton növekvő részsorozat ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) értéke $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k} + a_{i_k}$, azaz összeszorozzuk a részsorozatban szereplő összes számot és hozzáadjuk az utolsó értékét. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú dinamikus programozást használó algoritmust a legnagyobb értékű monoton növekvő részsorozat értékének megkeresésére.

(Például a 2, 5, 1, 3, 10, 7, 9 sorozatban a 2, 5, 7, 9 a legjobb részsorozat, ennek értéke $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 9 = 639$.)