Algoritmuselmélet

További NP-teljes problémák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

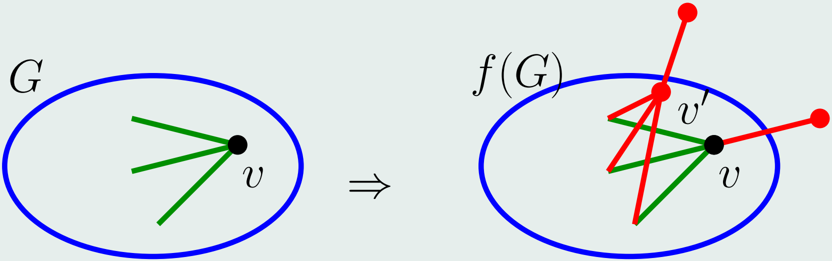
Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in$ NP, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$
Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



G-ben akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha $f(G)$-ben van Hamilton-út. $\square$

Maximális méretű független ponthalmaz gráfokban

MAXFTLEN

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-nek k elemű független csúcshalmaza?

Tétel

A MAXFTLN *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

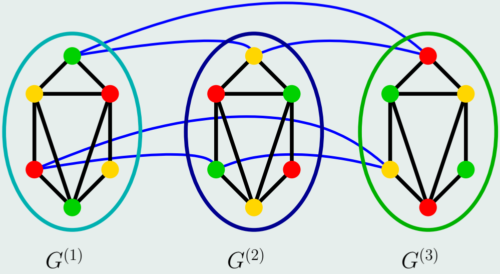
MAXFTLEN $\in$ NP*: tanú egy k-elemű $S \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz.* $\surd$

Megadunk egy 3SZÍN $\prec$ MAXFTLEN *Karp-redukciót:* $G \to (G', k')$

$$G \in \text{3SZÍN} \Leftrightarrow (G', k') \in \text{MAXFTLEN}$$

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.



$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ G' is $\implies$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$

Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.

$\implies$ Minden G-beli x pontnak pontosan 1 példányát tartalmazza S.

$\implies$ Az x pont legyen sárga / piros / zöld, ha ez a példány $G^{(1)}$-ben / $G^{(2)}$-ben / $G^{(3)}$-ban van. $\implies$ ez jó színezés G-ben. $\surd$ $\square$

Boole függvények normál formái

Konjunktív normál forma (CNF):

$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$

Diszjunktív normál forma (DNF):

$(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_4 \wedge \overline{x}_7 \wedge \overline{x}_{18}) \vee (x_9 \wedge \overline{x}_{10} \wedge \overline{x}_{13}) \vee \ldots$

Tétel

Minden Boole-formulának létezik konjunktív és diszjunktív normál formája is.

CNF-SAT és DNF-SAT problémák:
az input CNF illetve DNF formában van megadva

Boole függvények normál formái

Tétel

DNF-SAT$\in \mathrm{P}$.

Bizonyítás.

Ha egy klóz kielégíthető, akkor az egész függvény kielégíthető. Egy klóz akkor és csak akkor kielégíthető, ha nincs benne egyszerre x_i és $\overline{x_i}$ literál. Polinom időben ellenőrizhető, hogy van-e olyan klóz, amiben nincs ilyen változó. □

Tétel (S. A. Cook, L. Levin, 1971)

A CNF-SAT *probléma* NP*-teljes.*

Egy CNF függvény DNF-je lehet exponenciális méretű is.

Pl: $(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge \cdots (x_n \vee y_n) =$
$\cdots \vee (z_1 \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_n \wedge z_1' \wedge z_2' \wedge \cdots \wedge z_n' \wedge) \cdots \vee$
ahol $z_i = x_i$ vagy $\overline{x_i}$, illetve $z_i' = y_i$ vagy $\overline{y_i}$ az összes lehetséges kombinációban.

3SAT

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4SAT:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Definíció

Jelölje kSAT a kielégíthető k-CNF-ekből álló nyelvet.

$k\mathrm{SAT} \in \mathrm{NP} \Longleftarrow$ tanú egy kielégítés

Tétel

$1\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$, $2\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

3SAT

Tétel

3SAT NP-*teljes.*

Bizonyítás.

Belátjuk, hogy CNF-SAT $\prec$ 3SAT.
Tetszőleges ϕ formulához kell adni egy ψ-t ami 3CNF, és akkor és csak akkor kielégíthető, amikor ϕ, valamint polinom időben számolható.
$(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{n-1} \vee x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{n-2} \vee z) \wedge (\overline{z} \vee x_{n-1} \vee x_n)$
ahol z egy új változó.
Így eggyel csökkent a legnagyobb klóz mérete, az összméret pedig 2-vel nőtt.
Ezt többször ismételve minden klóz méretét 3-ra csökkentjük, közben az összméret kevesebb, mint 3-szorosára nő. $\square$

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.
A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.
$\Longrightarrow$

HÁT Bemenet: $s_1, \ldots, s_m$; $v_1 \ldots, v_m$; b; k.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$?

Lemma

HÁT $\in \mathrm{NP}$

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k$. $\Longrightarrow$

A Részhalmaz összeg probléma

RH Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

RH $\in$ NP. $\surd$
Belátható, hogy SAT $\prec$ RH.

Speciális eset: Partíció feladat: ahol $b = \frac{1}{2} \sum s_i$.

PARTÍCIÓ

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre
$\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i$?

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

PARTÍCIÓ $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$ PARTÍCIÓ, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \dots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \dots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

RH-nak megoldása az $R \subset \{s_1, ..., s_m\}$ számhalmaz $\Leftrightarrow$ a megoldáshoz vegyük hozzá $(s + 1 - b)$-t $\Leftrightarrow$ PARTÍCIÓ-nak megoldása az $R \cup \{s + 1 - b\}$ számhalmaz. $\square$

A Lineáris Programozás probléma

Egy cégnél alkalmaznak x junior programozót és y szenior programozót.
x és y nem feltétlen egész, lehetnek részmunkaidős alkalmazottak is.

A junior havi bére 1 millió Ft, a szenioré 1.5 millió. A cég havi bérkerete 20 millió.

A junior heti 5 órát konzultál a csoportvezetővel, a szenior heti 2 órát. A csoportvezető heti 40 órát dolgozik.

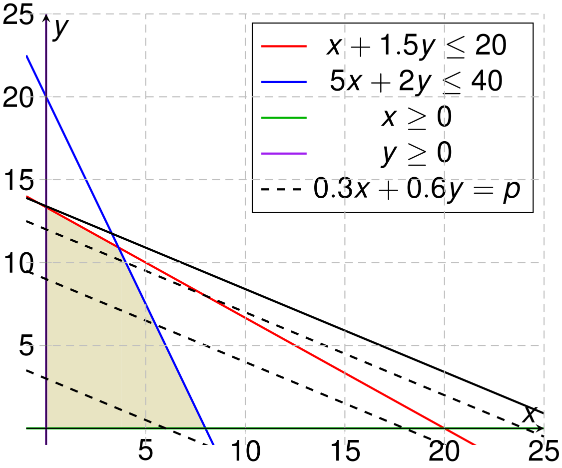
A junior havi 0.3 millió, a szenior 0.6 millió Ft profitot termel.

Hány junior illetve szenior programozót érdemes alkalmazni a profit maximalizálásához?

A Lineáris Programozás probléma

$$
\begin{aligned}
x + 1.5y &\leq 20 \quad \text{bérek} \\
5x + 2y &\leq 40 \quad \text{konzultáció} \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0 \\
\max\ 0.3x + 0.6y & \quad \text{profit}
\end{aligned}
$$

A Lineáris Programozás probléma



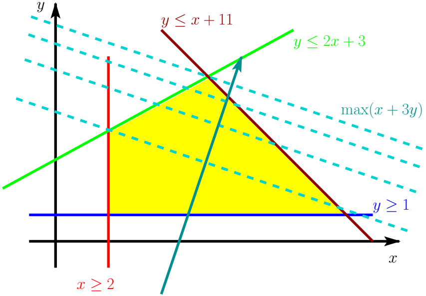
Animáció

A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket?
Ezt célfüggvénynek hívjuk.



A Lineáris Programozás probléma

Tétel

A Lineáris Programozás probléma P*-ben van.*

Legjobb algoritmus (Karmarkar): $v^{3,5}e$, ahol v a változók száma, e az egyenletek „összmérete”.

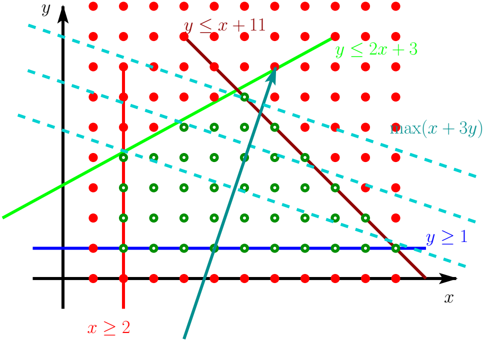
Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?



Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

IP $\in \mathrm{NP}$: tanú egy megoldás, (bár nehéz belátni, hogy a megoldás polinom méretű!) $\surd$

Belátjuk, hogy CNF-SAT $\prec$ IP

$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_6) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_6}) \Longrightarrow$

$0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1; \ldots ; 0 \leq x_6 \leq 1$

$x_1 + (1 - x_2) + x_5 \geq 1$

$x_2 + (1 - x_3) + x_6 \geq 1$

$(1 - x_2) + x_3 + x_5 + (1 - x_6) \geq 1$

$\square$

Tétel

A G gráf kromatikus számának meghatározását felírhatjuk IP problémaként.

Bizonyítás.

Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
Változók: $\forall i, j \in [1..n]$-re x_{ij} legyen 1, ha v_i színe j
$\forall i \in [1..n]$-re w_i, legyen 1, ha van j színű pont
Célfüggvény: $\min_j \sum w_j$ $(= \max_j \sum -w_j)$
Egyenlőtlenségek:
$\forall i, j \in [1..n]$-re $0 \leq x_{ij} \leq 1$; $0 \leq w_j \leq 1$, azaz minden változó értéke csak 0 vagy 1 lehet
$\forall i \in [1..n]$-re $1 \leq \sum_j x_{ij} \leq 1$ azaz minden csúcsnak pont egy színe van
$\forall \{u, v\} \in E(G)$-re és $\forall j \in [1..n]$-re $x_{uj} + x_{vj} \leq 1$, azaz egy él két végpontja nem lehet j színű
$\forall i, j \in [1..n]$-re $x_{ij} \leq w_j$, azaz ha valamelyik pont színe j, akkor van j színű pont
Az IP probléma megoldása megfelel egy minimális számú színt használó színezésnek. $\square$