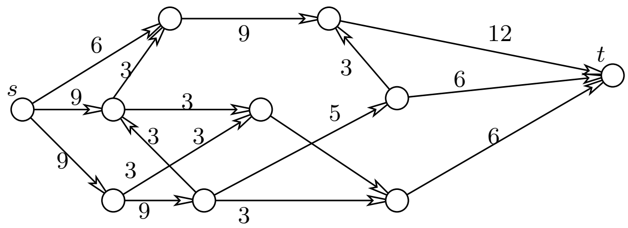
Bevezetés a számításelméletbe II.

1. ZH 2007. 03. 26. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Az alábbi ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik, a nyilaktól és a betűktől ill. számoktól tekintsünk el. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Lehetséges, hogy a terroristák a hálózatot valahol megmérgezték. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy egy speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szkafanderre is tapadhat méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse? (A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)



2. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy összefüggő, nem teljes gráf, akkor $\chi(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül G kromatikus és élszínezési számára.

3. Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges perfekt gráf, és legyen X a G csúcsainak egy részhalmaza. Jelölje E_1 mindazon E-beli élek halmazát, amiknek mindkét végpontja X-ben van, álljon E_2 a G gráf X-beli végponttal nem rendelkező éleiből, és legyen az X és $V \setminus X$ között futó G-beli élek halmaza E_3. Bizonyítsuk be, hogy a $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ és $G_3 = (V, E_3)$ gráfok mindegyike perfekt.

4. Igaz-e, hogy a fenti ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 19? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik. A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $k \geq 1$ és G egy tetszőleges k-élösszefüggő páros gráf, akkor G-be egy újabb élt behúzva a kapott G' gráf vagy páros lesz, vagy G' legalább k páratlan kört tartalmaz.

6. Tegyük fel, hogy a $2n$ pontú G páros gráf mindkét színosztályában n csúcs van, és G minden egyes csúcsának foka több, mint $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van teljes párosítása.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Janke Dávid (8, IB 138), Szabó Réka (8, 10, IB 139), Tóth Géza (8, 10, IB 140), Schlotter Ildikó (8, 10, IB 141), Szabó Marcell (8, IB 142), Richlik György (8, 10, IB 145), Fleiner Tamás (8, IB 146), Friedl Katalin (10, IB 138), Németh Zoltán (10, IB 142), Kőrösi Attila (10, IB 146), Szeszér Dávid (10, IB 134)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

2. ZH 2007. 04. 23. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Minden résztvevő a **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. A fenti feltételeket nem teljesítő dolgozatok érvénytelenek.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legfeljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak, ha $\tau(G) \leq 20$? (A $\tau(G)$ paraméter a G gráf lefogó pontjainak minimális számát jelöli.)

2. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf x csúcsa rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy G tetszőleges u csúcsa elérhető x-ből legfeljebb 4 élű sétán. Bizonyítsuk be, hogy az $M = A(G) + A(G)^2 + A(G)^3 + \ldots + A(G)^8$ mátrix egyetlen eleme sem 0, ahol $A(G)$ a G gráf szomszédsági mátrixát jelöli.

3. Keressük meg 24 minden olyan pozitív többszörösét, aminek pontosan 15 pozitív osztója van.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az n pozitív egészre $\varphi(30n) = 30 \cdot \varphi(n)$ teljesül, akkor n osztható 30-cal.

5. Határozzuk meg a $10x \equiv 24 \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldásait modulo m, ahol

   (a) $m = 15$ ill.

   (b) $m = 16$.

6. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n esetén teljesül, hogy $29 \mid 23^n + 6$.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Janke Dávid (8, IB 138), Szabó Réka (8, 10, IB 139), Tóth Géza (8, 10, IB 140), Schlotter Ildikó (8, 10, IB 141), Szabó Marcell (8, IB 142), Richlik György (8, 10, IB 145), Fleiner Tamás (8, IB 146), Friedl Katalin (10, IB 138), Németh Zoltán (10, IB 142), Kőrösi Attila (10, IB 146), Szeszér Dávid (10, IB 134)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

Első pótZH 2008. május 07. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Minden résztvevő a **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. A fenti feltételeket nem teljesítő dolgozatok érvénytelenek.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 6-reguláris, egyszerű, páros gráf, akkor G-nek van Euler-köre. (G 6-reguláris, ha minden csúcsának 6 a foka.)

2. Igazak-e az alábbi állítások? ($\alpha(G)$ a független csúcsok maximális száma.)

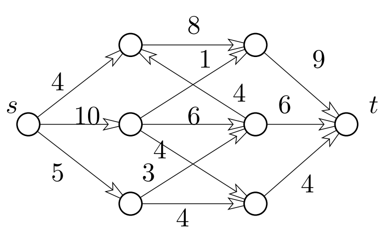
   (a) Ha a G véges gráf páros, akkor G minden G' részgráfjára $\alpha(G') \geq \frac{|V(G')|}{2}$ teljesül.

   (b) Ha G minden részgráfjára $\alpha(G') \geq \frac{|V(G')|}{2}$ teljesül, akkor G páros.

3. Legyen G egy tetszőleges 99 csúcsú egyszerű gráf, melynek minden csúcsa legalább 80 másik csúccsal szomszédos. Igazoljuk, hogy G csúcsait kiszínezhetjük legfeljebb 20 szín felhasználásával úgy, hogy bármely két összekötetlen pont színe különböző legyen.

4. Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, és G csúcsainak X részhalmaza rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy X bármely pontja szomszédos $V(G) \setminus X$ tetszőleges pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az a G' gráf is perfekt, amit úgy kapunk, hogy G-t X-n belül komplementáljuk, azaz u és v közt pontosan akkor fut él G'-ben, ha $u, v \in X$ és u és v G-ben nem szomszédosak, vagy akkor, ha u és v közül legalább az egyik nem X-beli, és u és v G-ben szomszédosak.

5. Határozzunk meg az alábbi hálózatban egy maximális nagyságú folyamot és egy minimális vágást!



6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 20 csúcsú, egyszerű, irányítatlan G gráf 12-szeresen élösszefüggő, akkor a komplementere nem lehet 8-szorosan élösszefüggő.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Janke Dávid (8, IB 138), Szabó Réka (8, 10, IB 139), Tóth Géza (8, 10, IB 140), Schlotter Ildikó (8, 10, IB 141), Szabó Marcell (8, IB 142), Richlik György (8, 10, IB 145), Fleiner Tamás (8, IB 146), Friedl Katalin (10, IB 138), Németh Zoltán (10, IB 142), Kőrösi Attila (10, IB 146), Szeszlér Dávid (10, IB 134)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

Második pótZH 2008. május 07. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Minden résztvevő a **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. A fenti feltételeket nem teljesítő dolgozatok érvénytelenek.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ számok, és az i és j csúcsok akkor legyenek G-ben szomszédosak, ha $i \neq j$ és i és j legnagyobb közös osztója páros, de 4-gyel nem osztható. Határozzuk meg a $\nu(G)$ és $\alpha(G)$paramétereket. (Emlékeztetőül: a $\nu(G)$ és $\alpha(G)$ mennyiségek a független élek ill. pontok maximális számát jelentik.)
2. Oldjuk meg a $18x \equiv 27 (\mathrm{mod}\ 105)$ kongruenciát.
3. Határozzuk meg mindazon n egész számokat, melyekre $3n + 1 \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 2n)$ teljesül.
4. Adjuk meg mindazon n pozitív egészek kanonikus alakját, amikre $d(n)$ prím.
5. Mi az utolsó két jegye az 5^{5^6} számnak 7-es számrendszerben?
6. Adjuk meg mindazon n pozitív egészek kanonikus alakját, amikre $\varphi(n) = \frac{n}{2}$.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Janke Dávid (8, IB 138), Szabó Réka (8, 10, IB 139), Tóth Géza (8, 10, IB 140), Schlotter Ildikó (8, 10, IB 141), Szabó Marcell (8, IB 142), Richlik György (8, 10, IB 145), Fleiner Tamás (8, IB 146), Friedl Katalin (10, IB 138), Németh Zoltán (10, IB 142), Kőrösi Attila (10, IB 146), Szeszlér Dávid (10, IB 134)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.
Első pótpótZH 2008. május 22. $8^{\underline{00}}$

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját**, valamint azt, hogy melyik tárgy hányadik zh-ját pótolja a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. A fenti feltételeket nem teljesítő dolgozatok érvénytelenek.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 9-reguláris, egyszerű, gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler köre.

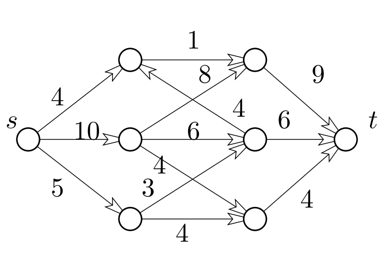
2. Tegyük fel, hogy G egy olyan 20 csúcsú, egyszerű gráf, melyben minden csúcs foka legalább 11, továbbá, hogy létezik egy v csúcs, ami G minden más csúcsával szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy G-nek létezik 10 páronként különböző (nem feltétlenül éldiszjunkt) Hamilton köre.

3. Legfeljebb hány csúcsa lehet annak az egyszerű G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 3$ és $\chi(\overline{G}) \leq 2$, ahol $\overline{G}$ a G gráf komplementerét jelenti?

4. Mennyi az élkromatikus száma annak a G gráfnak, aminek csúcsai egy szabályos 2008 oldalú sokszöget alkotnak, és két csúcs között pontosan akkor fut él, ha a csúcsok a sokszögön szomszédosak vagy másodszomszédosak?

5. Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, és G független csúcsainak maximális száma $\alpha(G) = 7$. Határozzuk meg a $\overline{G}$ komplementer gráf kromatikus számát.

6. Határozzunk meg a mellékelt hálózatban egy maximális nagyságú folyamot és egy minimális vágást! (A feladatlapot nem lehet beadni!)



Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.
Második **pótpótZH 2008. május 22. $8^{\underline{00}}$**

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját**, valamint azt, hogy melyik tárgy hányadik zh-ját pótolja a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. A fenti feltételeket nem teljesítő dolgozatok érvénytelenek.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai az $\{1, 2, \dots, 100\}$ számok, és az i és j csúcsok akkor legyenek G-ben szomszédosak, ha $i \neq j$ és i és j legnagyobb közös osztója páratlan vagy 4-gyel osztható. Határozzuk meg a $\nu(G)$ és $\alpha(G)$ paramétereket. (Emlékeztetőül: a $\nu(G)$ és $\alpha(G)$ mennyiségek a független élek ill. pontok maximális számát jelentik.)
2. Oldjuk meg a $17x \equiv 28 (\bmod\ 105)$ kongruenciát.
3. Határozzuk meg mindazon n egész számokat, melyekre $2n + 1 \equiv 6 (\bmod\ 3n)$ teljesül.
4. Adjuk meg mindazon n pozitív egészek kanonikus alakját, amikre $\varphi(n)$ prím.
5. Mi az utolsó két jegye az 7^{7^6} számnak 5-ös számrendszerben?
6. Adjuk meg mindazon n pozitív egészek kanonikus alakját, amik pozitív osztóinak száma $d(n) = \frac{n}{2}$.

Jó munkát!