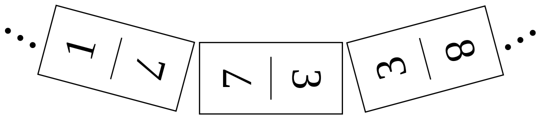
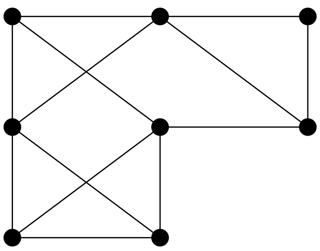
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2007. március 29.

1. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés!



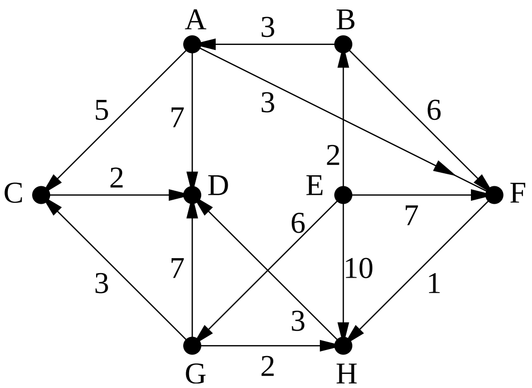
2. A G gráf csúcsai legyenek egy (8×8-as) sakktábla mezői. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők egy futóval egy lépésben elérhetők egymásból. Határozzuk meg G kromatikus számát! (A sakkban a futó csak átlósan mozoghat, de egy lépésben egy kiválasztott $\pm 45°$-os egyenes mentén tetszőlegesen sok mezőt léphet.)

3. Döntsük el, hogy perfekt-e az alábbi gráf!

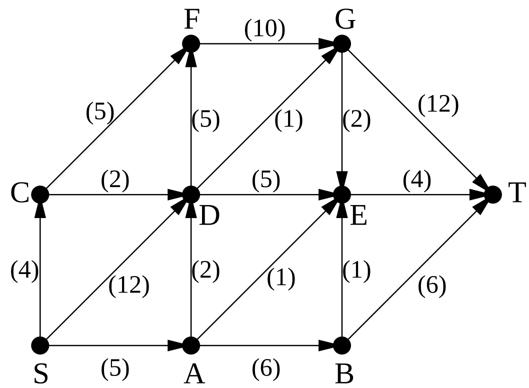


4. A G egyszerű gráfban a legnagyobb fokszám legyen Δ. Készítsük el a G' gráfot a következőképpen: G'-be vegyük fel G minden csúcsát és élét, továbbá G minden v csúcsa esetén vegyünk fel egy új v' csúcsot, amelyet kössünk össze v-vel; végül G minden $\{u, v\}$ élére G'-ben a megfelelő u' és v' csúcsokat is kössük össze. Mutassuk meg, hogy a kapott G' gráf élkromatikus száma $\chi_e(G') = \Delta + 1$.

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST-vágást (és bizonyítsuk be róla, hogy minimális)!



7. A $2n$ csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $n-1$, az összes többi csúcs foka legalább n (ahol $n > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás!

8. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G-ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x-től és y-tól különbözzenek, G-ben van olyan út, amely x-ből y-ba vezet és nem tartalmazza sem u-t, sem v-t. Mutassuk meg, hogy ekkor x-ből y-ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legföljebb 33.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2007. április 26.

1. Egy 30 fős társaságban mindenki legalább 20 embert ismer a többiek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a társaság tagjai közül 4 embert, közülük kiválasztható 2 olyan, akik nem ismerik egymást. A társaság három tagja Bakács úr, Szakács úr és Takács úr. Bakács úr nem ismeri sem Szakács urat, sem Takács urat. Ismeri-e egymást Szakács úr és Takács úr?

2. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészt, amelyekre teljesül, hogy a (pozitív) osztóik száma 8 és a (pozitív) osztóik összege páratlan szám!

3. Valamely n egészre teljesül, hogy $18n$ és $n+1$ ugyanazt a maradékot adják 202-vel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

4. Legyen $n = 200704261601$. Határozzuk meg n^n utolsó három számjegyét!

5. Milyen maradékot ad a 36 legkisebb 23-mal osztható pozitív egész szám szorzata 37-tel oszva?

6. Legyen $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a nullától különböző valós számok halmaza. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a > 0, \\ a : b, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

(Itt $\cdot$ és $:$ a valós számok hagyományos szorzását és osztását jelölik. Így például $2 * 3 = 6$ és $(-4) * 5 = -\frac{4}{5}$.) Csoportot alkot-e H a $*$ műveletre nézve?

7. Legyen $(G, \cdot)$ egy tetszőleges csoport. Tegyük fel, hogy a csoport valamely három $a, b, c \in G$ elemére $a \cdot b = c$, $b \cdot c = a$ és $c \cdot a = b$ teljesül. Határozzuk meg az $a \cdot c \cdot b$ szorzat értékét!

8. Van-e a D_{15} diédercsoportnak

a) 8 elemű részcsoportja;

b) 10 elemű részcsoportja?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

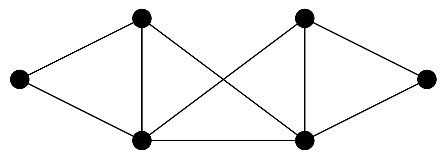
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — 2007. április 16.

1. Egy $2k$ csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka $k-1$ (ahol $k > 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni k darab új élet úgy, hogy a kapott gráf tartalmazzon Hamilton-kört!

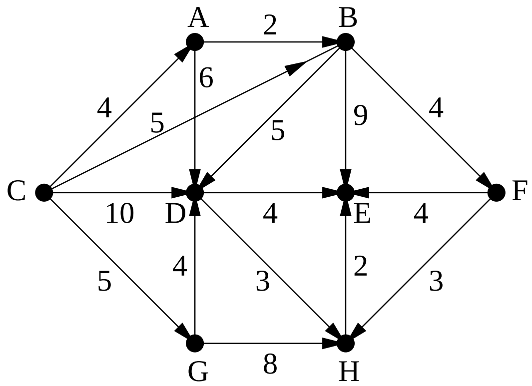
2. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 2007$. Készítsük el a G' gráfot a következőképpen: G'-be vegyük fel G minden csúcsát és élét, továbbá G minden v csúcsa esetén vegyünk fel egy új v' csúcsot, amelyet kössünk össze v-vel; végül G minden $\{u, v\}$ élére G'-ben a megfelelő u' és v' csúcsokat is kössük össze. Határozzuk meg a kapott G' gráf $\chi(G')$ kromatikus számát!

3. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e!

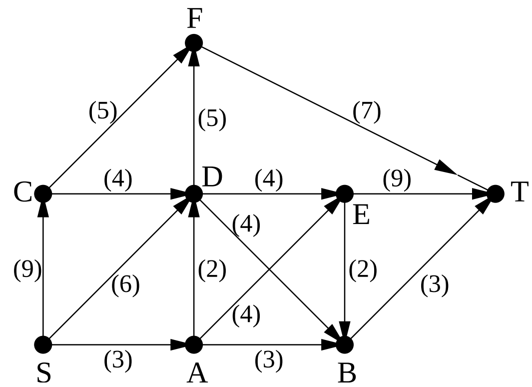


4. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y| = 1$ vagy $|x-y| = 50$. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát!

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST-vágást (és bizonyítsuk be róla, hogy minimális)!



7. Legyen G egy 100 csúcsú egyszerű gráf és legyen $X \subseteq V(G)$ egy 52 csúcsból álló független csúcshalmaz G-ben. Legyen $u, v, w \in X$ három tetszőleges X-beli csúcs. Adjuk hozzá G-hez az $\{u, v\}$, az $\{u, w\}$ és a $\{v, w\}$ éleket. Van-e a kapott gráfban teljes párosítás?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k \geq 1$ esetén minden k-szorosan élösszefüggő gráfban megadható $k-1$ darab kör úgy, hogy a körök közül bármelyik kettőnek legföljebb egy közös éle van!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
2007. május 10.

1. 16 kisváros focicsapata körmérkőzéses bajnokságot játszik. A bajnokság egyelőre ott tart, hogy minden csapat legföljebb 3 csapattal játszott a többiek közül (és semelyik két csapat nem játszott egymással egynél több meccset). Tudjuk továbbá, hogy bárhogyan választunk ki 5 csapatot, közülük kiválasztható 2 olyan, akik már játszottak egymással. A bajnokságban részt vesz Aladárháza, Benőháza és Csongorháza csapata. Aladárháza már játszott Benőházával, de még nem játszott Csongorházával. Játszott-e már egymással Benőháza és Csongorháza?

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra

$$(a+b, c+d) \,\Big|\, a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}$$

teljesül, (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).

3. Valamely n pozitív egészre teljesül, hogy $18n + 2$ és $n + 13$ utolsó két számjegye megegyezik. Mi ez a két számjegy?

4. Bizonyítsuk be, hogy $38^{59} + 2$ osztható 77-tel!

5. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 30, differenciája 59. (A sorozat tagjai tehát: $30, 89, 148, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 28 tagjának szorzata 29-cel osztva?

6. Legyen $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ a sík azon pontjainak halmaza, amelyeknek mindkét koordinátája egész. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a,b) * (c,d) = \begin{cases} (a+c, b+d), & \text{ha } a+b \text{ páros,} \\ (a+d, b+c), & \text{ha } a+b \text{ páratlan.} \end{cases}$$

(Így például $(1, 3) * (4, 5) = (5, 8)$ és $(4, 5) * (1, 3) = (7, 6)$.) Csoportot alkot-e H a $*$ műveletre nézve?

7. Legyen $(G, \cdot)$ egy tetszőleges csoport. Tegyük fel, hogy a csoport valamely két $a, b \in G$ elemére $a \cdot b \cdot a = b$ és $b \cdot a \cdot b = a$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $o(a) \leq 4$ (ahol $o(a)$ az a elem rendjét jelöli).

8. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

a) A D_{2007} diédercsoport minden páratlan elemszámú részcsoportja Abel-csoport.

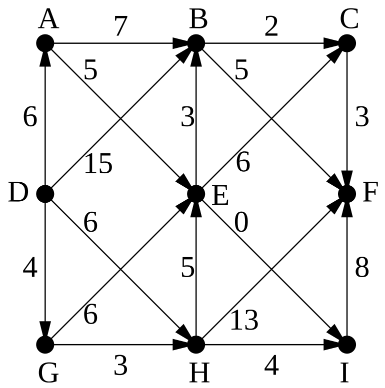
b) A D_{2007} diédercsoport minden olyan részcsoportja, amely Abel-csoport, páratlan elemszámú.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
GyakIV feladatok
2007. május 25.

1. A G gráf csúcsai legyenek egy (8×8-as) sakktábla mezői. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezőket egy király legföljebb két lépésben el tudja érni egymásból. Határozzuk meg G kromatikus számát! (A sakkban a király egy lépésben bármely mezőről egy azzal akár élszomszédos, akár csúcsszomszédos mezőre léphet.)

2. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



3. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 2007\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x < y$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $y - x \equiv 1 \pmod{10}$. Határozzuk meg $\nu(G)$, vagyis a G-beli független élek maximális számának értékét!

4. Legyen G egy $2k$-szorosan összefüggő gráf és legyenek $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ páronként különböző csúcsok G-ben (valamely $k \geq 2$ egész esetén). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van olyan kör, amely tartalmazza a $v_1, v_2, \dots, v_k$ csúcsokat, de nem tartalmazza a $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k}$ csúcsokat!

5. Legyen G egy 21 csúcsú, 110 élű egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor G tartalmaz 3 pontú kört is!

6. Egy n páratlan egész szám 40-szerese 12 maradékot ad 342-vel osztva. Milyen maradékot ad n 342-vel osztva?

7. Milyen maradékot ad 100! 103-mal osztva?

8. A H halmaz álljon a síknak azokból a pontjaiból, amelyeknek a második koordinátája nem 0. (Képletben: $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$.) Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (a + b \cdot c, b \cdot d)$$

(ahol $+$ és $\cdot$ a valós számok szokásos összeadását és szorzását jelöli. Így például $(2, 3) * (4, 5) = (14, 15)$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, a tárgy neve (BSz 2). A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.