Bevezetés a számításelméletbe II.

1. ZH 2006. 03. 30. 15.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

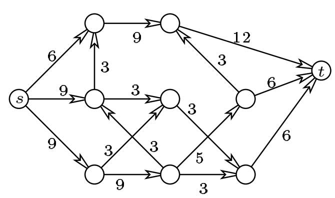
Feladatok

1. Létezik-e Euler-köre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf $L(K_{n,n})$ élgráfjának?

2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak létezik hat különböző csúcsa azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogyan festünk e hat pont közül hármat pirosra és színezzük a másik hármat zöldre, a piros pontokból zöld pontokba futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális száma legfeljebb 5 lesz. (Két utat belsőleg pontdiszjunktnak mondunk, ha az esetlegesen egybeeső végpontjaiktól eltekintve nincsenek közös *belső* pontjaik.) Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton köre!

3. Tegyük fel, hogy G egy 2006 csúcsú, síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf komplementerének kromatikus számára $\chi(\overline{G}) \geq 400$ áll!

4. Igaz-e, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyamérték 19? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)



5. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy $n \geq 4$ csúcsú, egyszerű, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-szeresen összefüggő gráf, akkor G-nek létezik Hamilton-köre. (Itt $\lceil x \rceil$ jelöli az x szám felső egészrészét, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely nem kisebb x-nél.)

6. Tegyük fel, hogy a $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf A színosztálya a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pontokból áll, továbbá, hogy a v_i csúcs fokszámára $d(v_i) \geq i$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Mennyi a $\tau(G)$ értéke, azaz a G gráfban a lefogó pontok minimális száma?

7. Tegyük fel, hogy a G gráfnak $n = 9999$ pontja van, legyen maximális fokszáma $\Delta(G) = 2006$, élkromatikus száma pedig $\chi_e(G) = 2006$ (más jelöléssel $\chi'(G) = 2006$). Bizonyítsuk be, hogy G-nek van 2006-nál kisebb fokszámú csúcsa!

8. Legyen G_n az a gráf, amit úgy kapunk, hogy felosztjuk a $K_{n,n}$ teljes páros gráf egy uv élét, azaz töröljük uv-t és bevezetünk egy új x csúcsot, illetve az xu és xv éleket. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n számot, melyre G_n perfekt!

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Tóth Géza (K 10:15-11:45 IB.138 és Sz 12:15-13:45, IB.141.), Koblinger Egmont (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Németh Zoltán (Sz 12:15-13:45, IB.139.) Németh András (Sz 12:15-13:45 IB. 140 és K 8:15-9:45, IB.142.), Fleiner Tamás (K 8:15-9:45, IB.138.), Richlik György (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.139.), Biró Péter (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.140.) Megyeri Csaba (K 8:15-9:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (K 10:15-11:45, IB.141.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

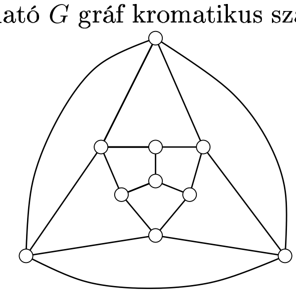
1. pótZH 2006. 04. 20. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai az $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{100}, v_{100}$ pontok, élei pedig $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{100}v_{100}$, továbbá $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{99}u_{100}$, valamint $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{99}v_{100}$. Döntsük el, létezik-e G-nek Euler-köre, illetve Hamilton köre!
2. Létezik-e Hamilton köre a $K_{2006,2006}$ teljes páros gráf $L(K_{2006,2006})$ élgráfjának?
3. Tegyük fel, hogy egy (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke k, és az a célunk, hogy ezt az értéket minél jobban leszorítsuk. Az egyetlen eszközünk erre, hogy a gráf egy tetszőleges élét törölhetjük (azaz kapacitását 0-vá tehetjük). Igaz-e, hogy optimális választás esetén mindig egy minimális st-vágásban található élt törlünk?
4. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban minden élkapacitás $\frac{3}{2}$ vagy $\frac{7}{4}$ vagy $\frac{9}{5}$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan maximális f folyam, ami minden élen egy egész szám huszadrészét veszi fel értékként!
5. Legyen F egy 30-csúcsú fa, v pedig F egy tetszőleges csúcsa. Tegyük fel, hogy v-től 1, 2, 3, ill. 4 távolságra rendre $3, 7, 10$, ill. 9 csúcs található. Bizonyítsuk be, hogy F-nek nincs teljes párosítása!
6. Tegyük fel, hogy a G páros gráfra teljesül a következő. G csúcsainak bármely X részhalmazára igaz, hogy az X halmaz pontjainak (és az X-beli pontokra illeszkedő éleknek) a törlésével keletkező $G - X$ gráf legfeljebb $|X|$ izolált pontot tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G-nek létezik teljes párosítása!
7. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát!



8. Legyenek a G gráf csúcsai a k körvonal $I_1, I_2, \dots, I_n$ ívei, és két csúcs között akkor fusson él, ha a megfelelő ívek metszik egymást. Igaz-e, hogy G az ívek tetszőleges választása esetén perfekt gráf?

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Tóth Géza (K 10:15-11:45 IB.138 és Sz 12:15-13:45, IB.141.), Koblinger Egmont (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Németh Zoltán (Sz 12:15-13:45, IB.139.) Németh András (Sz 12:15-13:45 IB. 140 és K 8:15-9:45, IB.142.), Fleiner Tamás (K 8:15-9:45, IB.138.), Richlik György (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.139.), Biró Péter (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.140.) Megyeri Csaba (K 8:15-9:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (K 10:15-11:45, IB.141.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

2. ZH 2006. május 4. 15.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Határozzuk meg 2700 és 1620 közös (pozitív) osztóinak számát!
2. Hány olyan (a, b) számpár van a pozitív egész számok között, amelyre $(a, b) = 2006$ és a és b legkisebb közös többszöröse pedig 2006^2?
3. Hány megoldása van modulo 2006 a $136x \equiv 680 \pmod{2006}$ ill. a $136x \equiv 700 \pmod{2006}$ kongruenciáknak?
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, m) = 1$, $(b, m) = 1$ és $ax \equiv b \pmod m$ valamint $by \equiv a \pmod m$ teljesülnek az x, y egész számokra, akkor $xy \equiv 1 \pmod m$ is igaz!
5. Határozzuk meg mindazon $n \geq 2$ egészeket, melyekre a D_n diédercsoportban minden elem rendje n-nek osztója!
6. Csoportot alkotnak-e a szokásos szorzásra a valós és tiszta képzetes számok a 0 nélkül, azaz csoport-e $(X, \cdot)$, ahol $X = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\} \cup \{ai : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$, ill. $\cdot$ a komplex számokon értelmezett szokásos szorzást jelöli?
7. Tegyük fel, hogy G egy 49-elemű csoport, és H_1 ill. H_2 a G valódi részcsoportjai. Bizonyítsuk be, hogy $|H_1| = |H_2|$ teljesül! (Egy G csoport valódi részcsoportja egy olyan $H \leq G$ részcsoport, ami az egységelem mellett még legalább egy másik elemet is tartalmaz és $H \neq G$.)
8. Tegyük fel, hogy H a G csoport egy 2 indexű részcsoportja, azaz $H \leq G$ és $|G : H| = 2$. Bizonyítsuk be, hogy G tetszőleges g elemére $gH = Hg$ teljesül!

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Tóth Géza (K 10:15-11:45 IB.138 és Sz 12:15-13:45, IB.141.), Koblinger Egmont (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Németh Zoltán (Sz 12:15-13:45, IB.139.) Németh András (Sz 12:15-13:45 IB. 140 és K 8:15-9:45, IB.142.), Fleiner Tamás (K 8:15-9:45, IB.138.), Richlik György (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.139.), Biró Péter (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.140.) Megyeri Csaba (K 8:15-9:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (K 10:15-11:45, IB.141.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe II.

2. pótZH 2006. május 11. 8.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Hány 0-ra végződik a $\binom{100}{42}$ binomiális együttható meghatározta szám tizes számrendszerbeli alakja?
2. Legfeljebb hány pozitív osztója lehet egy olyan n pozitív egésznek, ami három, nem feltétlenül különböző prím szorzata?
3. Oldjuk meg a $42x \equiv 132 \pmod{57}$ kongruenciát!
4. Határozzuk meg mindazon x pozitív egész számokat, amelyekre $5x \equiv 2006 \pmod{2x}$ teljesül!
5. Legyen G egy véges csoport, és legyenek k_1 és k_2 a G csoport olyan elemei, melyek bármely csoportelemmel felcserélhetőek, azaz $k_1g = gk_1$ és $k_2g = gk_2$ teljesül tetszőleges $g \in G$-re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G bármely g elemére $(k_1k_2)g = g(k_1k_2)$ áll!
6. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2$ esetén az S_n szimmetrikus csoportnak létezik n-edrendű eleme!
7. Határozzuk meg a D_5 diédercsoport részcsoportjainak számát!
8. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy 35 elemű csoport, és a H halmaz a G csoport 8 különböző elemét tartalmazza, akkor a H által generált részcsoport maga a G csoport.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Tóth Géza (K 10:15-11:45 IB.138 és Sz 12:15-13:45, IB.141.), Koblinger Egmont (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Németh Zoltán (Sz 12:15-13:45, IB.139.) Németh András (Sz 12:15-13:45 IB. 140 és K 8:15-9:45, IB.142.), Fleiner Tamás (K 8:15-9:45, IB.138.), Richlik György (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.139.), Biró Péter (K 8:15-9:45 és K 10:15-11:45, IB.140.) Megyeri Csaba (K 8:15-9:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (K 10:15-11:45, IB.141.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

Jó munkát!