Bevezetés a számításelméletbe II. Zárthelyi feladatok 2002. május 24.

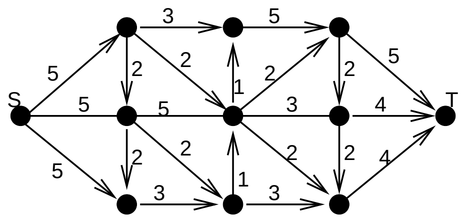
1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges, hurokélmentes G gráfnak van Euler-köre, akkor G élgráfjának is van Euler-köre. Igaz-e az előbbi állítás megfordítása?

2. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványával egyenlő.

3. Mutassuk meg, hogy ha egy véges, egyszerű G gráfra $\chi(G) = \tau(G) + 1$, akkor egyben $\chi(G) = \omega(G)$ is teljesül.

4. Mennyi az $\alpha(G)$ értéke egy olyan egyszerű G gráfra, aminek 2002 csúcsa van, és éleinek száma a lehető legnagyobb azon feltétel mellett, hogy nem tartalmaz 20-nál nagyobb klikket.

5. Adjunk meg egy maximális folyamot és állapítsuk meg annak értékét az alábbi hálózatban! (Az élekre írt számok a kapacitásokat jelentik.)



6. Legyen n olyan pozitív egész szám, ami sem 2-vel, sem 5-tel nem osztható. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amire $k \cdot n$ tízes számrendszerbeli alakja csupa 9-es számjeggyel írható le.

7. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 68-cal adott maradékát)!
$$24\,x \equiv 84 \pmod{68}$$

8. Legyenek H és K egy G csoport részcsoportjai. Bizonyítsuk be, hogy ha G-nek a részhalmazszorzással (komplexusszorzással) létrejövő HK és KH részhalmazai azonosak, vagyis $HK = KH$, akkor HK is részcsoportja G-nek.

A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32.

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.

Bevezetés a számításelméletbe II. Zárthelyi feladatok 2002. június 4.

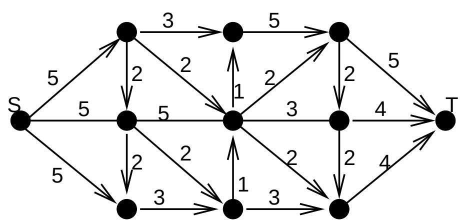
1. Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy G-ben megadható olyan minden élen áthaladó séta, amely minden élen legfeljebb kétszer halad át.

2. Legyen G olyan 2002 csúcsú gráf, aminek van Hamilton-köre. Mutassuk meg, hogy ha G-ből elhagyunk 1000 csúcsot (a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt), akkor a megmaradó gráfnak még mindig van legalább két éle.

3. Legyenek egy G gráf csúcsai azok a 10^{100}-nál nem nagyobb pozitív egész számok, amelyeknek van 20-nál kisebb prímosztója. G két csúcsa pontosan akkor alkot élet, ha a megfelelő pozitív egészek relatív prímek. Állapítsuk meg G kromatikus számának értékét!

4. Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n - 1$ nem lehet prímszám.

5. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon! (Az élekre írt számok az adott élek "hosszát" jelentik.)



6. Mutassuk meg, hogy $2002! + 1$ osztható 2003-mal

7. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 77-tel adott maradékát)!
$$121\,x \equiv 55 \pmod{77}$$

8. Legyen G csoport, H és K pedig G-nek részcsoportjai. Mutassuk meg, hogy $H \cup K$ akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha vagy $H \subseteq K$, vagy $K \subseteq H$.

A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32.

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.