

1. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett \oplus „összeadás” és \odot „szorzás” művelettel gyűrűt, ferdetestet, illetve testet alkotnak-e?

a) Egy X halmaz összes részhalmazának $P(X)$ halmaza, $\oplus = \cup$, $\odot = \cap$;

b) egy X halmaz összes részhalmazának $P(X)$ halmaza; $\oplus = \Delta$ (szimmetrikus differencia), $\odot = \cap$;

c) a valós számok halmaza; $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $a \odot b = a \cdot b$ (hagyományos szorzás);

d) az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok halmaza; \oplus és \odot a hagyományos mátrixműveletek;

e) a pozitív valós számok halmaza; $a \oplus b = a \cdot b$, $a \odot b = a^{\lg b}$.

2. A \mathbb{Z}_{13} testben dolgozunk. Vezessük be az $\frac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Számítsd ki az alábbi műveletek eredményét!

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{5}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7} \right)$

3. Tetszőleges (kommutatív) testben vezessük be az $\frac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat!

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

4. Bizonyítsd be, hogy kommutatív testben minden elemnek legfőljebb két négyzetgyöke lehet (vagyis az $x^2 = a$ egyenletnek legfőljebb két megoldása lehet a test tetszőleges a elemére).

5. Bizonyítsd be, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ és a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (hasonlóan definiált) testek nem izomorfak. (Mindkét esetben a műveletek a hagyományos összeadás és szorzás.)

6. Az (angol) ábécé huszonhat betűjét a $0, 1, \dots, 25$ számokkal helyettesítem ($A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, stb., $Z = 25$). Nyilvános kódolófüggvényem: $x \mapsto x^{43} \pmod{85}$. (Ezzel a $0, 1, \dots, 84$ számokat lehet kódolni, de csak az első huszonhat számnak van valódi jelentése.) Ezzel a függvénnyel kódoltam titkos üzenetemet is:

59 2 59 20 44 52

Törd fel a kódomat, vagyis készíts a fenti kódolófüggvényhez dekódolófüggvényt, majd fejtse meg vele titkos üzenetemet!