

- Milyen maradékot ad
 - 50^{50} 11-gyel osztva;
 - 2^{100} 45-tel osztva;
 - $11^{11^{11}}$ 7-tel osztva?
- Mennyi maradékot ad 22-vel osztva $3^{22} + 33^{22} + 333^{22}$? (ZH, 2010. május 6.)
- Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: 32, 83, 134, ...) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)
- Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
 - 303^{404}
 - $49^{49^{50}}$
 - $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$ (ZH, 2003. május 22.)
- Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy
 - a művelet asszociatív-e;
 - van-e egységelem;
 - mely elemeknek van inverze;
 - csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?
 - a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; szimmetrikus differencia. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
 - az egész számok \mathbb{Z} halmaza; az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott művelet.
 - a modulo n maradékosztályok; az összeadás.

6. Hány olyan 600-nál nem nagyobb, pozitív egész a szám van, amelyre az $a \cdot x \equiv 1 \pmod{600}$ lineáris kongruencia megoldható? (ZH, 2009. április 24.)

7. Legyen $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, vagyis a nem az x -tengelyre eső síkvektorok halmaza. Értelmezzük H -n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$ -ra nézve! (ZH, 2011. május 9.)

8. Az (a_n) sorozatot értelmezzük a következő rekurziós képlettel: $a_1 = 25$ és $a_{n+1} = 4a_n - 3$ minden $n \geq 1$ egész esetén. (A sorozat tagjai tehát: 25, 97, 385, ...) Milyen maradékot ad a sorozat első 25 tagjának szorzata 72-vel osztva? (ZH, 2009. május 4.)

9. Egy $n \geq 5$ pozitív egész szám relatív prím minden nála kisebb, hárommal osztható pozitív számhoz. Mutassuk meg, hogy n prím. (ZH, 2010. május 18.)

10. Mutassuk meg, hogy $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$ minden n pozitív egészre és adjunk meg egy olyan $n > 10$ számot, melyre egyenlőség teljesül. (ZH, 2010. április 22.)

11. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G -nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

12. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az $a \cdot x = b$ egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy egy tetszőleges G csoport minden a és b eleméhez található a csoportnak olyan x eleme, amelyre $a \cdot x = b$ teljesül.)

13. Legyen G egy olyan csoport, amelyben minden elem négyzete (vagyis önmagával vett szorzata) az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!

14. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel csoportot alkotnak-e?

a) $H = \{\text{tik, tak}\}$ halmaz; az $x * y = \begin{cases} \text{tik,} & \text{ha } x = y \\ \text{tak,} & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ utasítással megadott művelet.

b) $H = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ számhalmaz; a valós számok szorzása.

c) a (-1) -től különböző valós számok halmaza; az $a * b = a \cdot b + a + b$ képlettel megadott művelet.

d) az $n \times n$ -es, 1 determinánsú (valós) mátrixok halmaza; a mátrixszorzás.