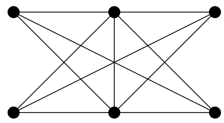
Bevezetés a Számításelméletbe II. — Hatodik gyakorlat
16. kurzus, 2013. március 26.

1. Milyen k értékek esetén k-szorosan összefüggőek, illetve k-szorosan élösszefüggőek az alábbi gráfok?

a) egy 100 pontú út;
b) egy 100 pontú kör;
c) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;
d) 

---

2. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemû halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő! (ZH, 2003. április 30.)

3. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör! (ZH, 2003. június 5.)

4. Bizonyítsd be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha k-szorosan pontösszefüggő!

5. Legyen A és B a G gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább k elemû részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el G-ből k-nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely A és B-beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik G-ben k darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B-beli pontokat köt össze!

6. Bizonyítsd be, hogy egy k-szorosan élösszefüggő, n pontú gráfnak legalább $\frac{kn}{2}$ éle van!

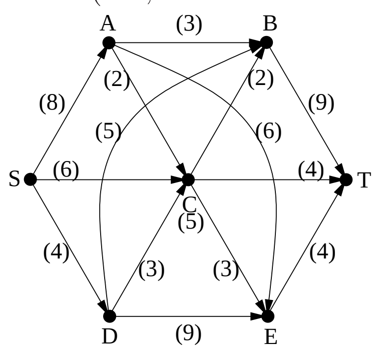
7. Legyen $k \leq n-1$. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú egyszerû gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő!

8. Legyen G reguláris páros gráf, amelyről tudjuk, hogy összefüggő és legalább három csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő. (ZH, 2002. május 16.)

9. Legyen $k \leq n-1$. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú egyszerû gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő!

---

10. Az alábbi hálózatban az éleken kívül a C csúcsnak is van kapacitása. Adjunk meg egy maximális folyamot S-bõl T-be, és bizonyítsuk be róla, hogy maximális! (ZH, 2009. március 23.)



11. Az alábbi hálózatban a pontoknak is van kapacitása. Vezesd vissza a problémát az eredeti hálózati folyamproblémára, majd keress maximális folyamot és minimális vágást!