Feladat: Legyen G reguláris páros gráf, amelyről tudjuk, hogy összefüggő és legalább három csúcsa van. Mu- tassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő.

Megoldás: Tudjuk, hogy egy k-reguláris páros gráf két osztályának elemszáma biztosan egyenlő. (Egyszerű meggondolni: f fiúból kf él indul ki, ℓ lányba pedig $k\ell$ él érkezik, és $kf = k\ell$.) Legyen az egyes osztályok mérete n! (A gráf tehát $2n$ csúcsú.)

Hagyjunk el egy x pontot az „alsó" osztályból! Tegyük fel, hogy a gráf szétesik, vagyis legalább két komponensre esik! A komponensek nyilván maguk is páros gráfok lesznek. Jelöljük az egyes komponensek „alsó" osztályait $A_1, A_2, \ldots\ A_m$-mel, a megfelelő „felső" osztályokat $B_1 \ldots B_m$-el!

Igaz, hogy $|A_1| + \ldots + |A_m| = n - 1$ és $|B_1| + \ldots + |B_m| = n$ (hiszen x-en kívül minden csúcs eleme valamelyik halmaznak.)

Állítás: $|A_i| \leq |B_i|$

Bizonyítás: A_i pontjaihoz csatlakozó egyik élet sem hagytuk el (hiszen eredetileg x-szel egy osztályban voltak), így a benne lévő csúcsok fokszámainak összege $k|A_i|$. Ez megegyezik a B_i elemeinek fokszámösszegével. (Hiszen A_i és B_i egy komponenst alkot, amiből nem vezet ki további él.) B_i pontjaihoz csatlakozó éleket lehet, hogy elhagytunk, így csak azt tudjuk, hogy a csúcsok fokszámai legfeljebb k-k lehetnek, tehát a fokszámösszeg (amiről tudjuk, hogy $k|A_i$) legfeljebb $k|B_i|$, vagyis $k|A_i| \leq k|B_i|$

Állítás: $|A_i| < |B_i|$

Bizonyítás: Az előző tételben akkor állhatna egyenlőség, ha minden B_i-beli csúcs fokszáma k maradt, vagyis B_i egyik csúcsa sem volt összekötve x-el. Ez lehetetlen, mert ebben az esetben $A_i \cup B_i$-ből nem vezetett volna ki él az eredeti G gráfban, tehát az nem lett volna összefüggő. Ezzel beláttuk az állítást.

Az állítást így is átfogalmazhatjuk: $|A_i| + 1 \leq |B_i|$ Adjuk össze az ilyen alakú állításokat $i = 1$-től m-ig!

$$|A_1| + \ldots + |A_m| + m \leq |B_1| + \ldots + |B_m|$$

beírva, amit korábbról tudunk:

$$n - 1 + m = n$$

$$m = 1$$

Ami azt jelenti, hogy ha a gráf x elhagyása után szétesett m részre, akkor 1 részre esett szét, vagyis nem esett szét. Ez ellentmondás, tehát hibás a kiinduló feltételezésünk, hogy a gráf szétesett.

Azt kaptuk tehát, hogy bárhogy hagyunk el egy x csúcsot a gráfból, a maradék összefüggő lesz, vagyis a gráf 2-szeresen összefüggő.