Bevezetés a Számításelméletbe II. — Kilencedik gyakorlat

19+21+25. kurzus, 2012. április 2.

1. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a) 303^{404}

b) $49^{49^{50}}$

c) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$ (ZH, 2003. május 22.)

2. Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy

(i) a művelet asszociatív-e; (ii) van-e egységelem;

(iii) mely elemeknek van inverze; (iv) csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?

a) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.

b) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.

c) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; szimmetrikus differencia. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)

d) az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza; az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott művelet.

e) a modulo n maradékosztályok; az összeadás.

---

3. Hány olyan 600-nál nem nagyobb, pozitív egész a szám van, amelyre az $a \cdot x \equiv 1 \pmod{600}$ lineáris kongruencia megoldható? (ZH, 2009. április 24.)

4. Legyen $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, vagyis a nem az x-tengelyre eső síkvektorok halmaza. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e *-ra nézve! (ZH, 2011. május 9.)

5. Az (a_n) sorozatot értelmezzük a következő rekurziós képlettel: $a_1 = 25$ és $a_{n+1} = 4a_n - 3$ minden $n \geq 1$ egész esetén. (A sorozat tagjai tehát: 25, 97, 385, ...) Miylen maradékot ad a sorozat első 25 tagjának szorzata 72-vel osztva? (ZH, 2009. május 4.)

6. Egy $n \geq 5$ pozitív egész szám relatív prím minden nála kisebb, hárommal osztható pozitív számhoz. Mutassuk meg, hogy n prím. (ZH, 2010. május 18.)

7. Mutassuk meg, hogy $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$ minden n pozitív egészre és adjunk meg egy olyan n $>$ 10 számot, melyre egyenlőség teljesül. (ZH, 2010. április 22.)

8. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

9. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az $a \cdot x = b$ egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy egy tetszőleges G csoport minden a és b eleméhez található a csoportnak olyan x eleme, amelyre $a \cdot x = b$ teljesül.)

10. Legyen G egy olyan csoport, amelyben minden elem négyzete (vagyis önmagával vett szorzata) az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!

11. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel csoportot alkotnak-e?

a) a $H = \{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz; az $x * y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ utasítással megadott művelet.

b) $H = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\ , a^2 + b^2 \neq 0\}$ számhalmaz; a valós számok szorzása.

c) a (-1)-től különböző valós számok halmaza; az $a * b = a \cdot b + a + b$ képlettel megadott művelet.

d) az $n \times n$-es, 1 determinánsú (valós) mátrixok halmaza; a mátrixszorzás.