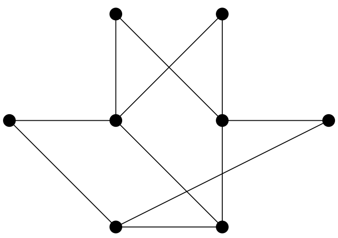
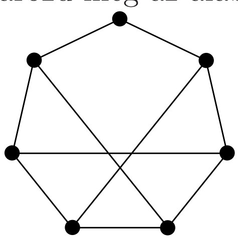
Bevezetés a Számításelméletbe II. — Második gyakorlat

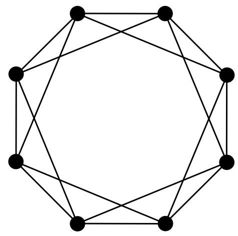
19+21+25. kurzus, 2012. február 6.

1. Páros gráf-e az alábbi gráf?



2. Határozd meg az alábbi gráfok kromatikus számát!

a) 

b) 

3. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2007 közé eső természetes számok. Két csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

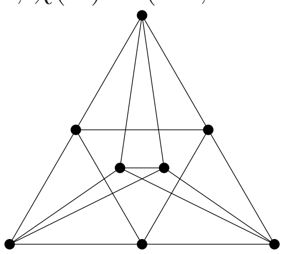
4. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G-ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$! (ZH, 2003. május 13.)

---

5. Egy gráf csúcsai az 1, 2, ..., 100 számok, két (különböző) csúcsot összekötünk, ha a szorzatuk osztható 7-tel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát. (ZH, 2010. május 6.)

6. Egy 101 csúcsú gráf legrövidebb köre pontosan 100 csúcsot tartalmaz. Igaz-e, hogy a gráf biztosan páros? (ZH, 2010. május 6.)

7. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (ZH, 2005. március 31.)



8. A G egyszerű gráfban 2007 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2006. Bizonyítsd be, hogy $\chi(G) \leq 2007$.

9. A G gráf csúcsai legyenek az $u_1, u_2, \ldots, u_{2003}$, $v_1, v_2 \ldots, v_{2004}$ pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

10.a) Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsd be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

b) Bizonyítsd be, hogy e élű G gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

11. Egy 2010 csúcsú teljes gráfból kitörlünk két nem csatlakozó élet. Mennyi lesz a kapott gráf kromatikus száma? (ZH, 2010. május 6.)

12. Egy 50 csúcsú teljes gráfból hagyjuk el egy Hamilton-körének éleit. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma? (ZH, 2010. május 18.)

13. Legyen G olyan gráf, melyre $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon! (ZH, 1999. április 8.) (Az élek irányítása azt jelenti, hogy minden él egyik végére egy nyilat teszünk. Irányított út azt jelenti, hogy úgy teszünk meg egy utat a gráfban, hogy a nyilakkal szemben nem haladhatunk.)

14.a) Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek pontjai számozhatóak úgy, hogy minden pont legfeljebb kettő nála nagyobb sorszámúval szomszédos. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq 3$. (ZH, 2001. május 27.)

b) Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

15. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges e élű, egyszerű gráf élei közül elhagyható legföljebb $\frac{e}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen!