Bevezetés a Számításelméletbe I.

Kilencedik gyakorlat, 2014. november 4.

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (2;3)$ vektorhoz a $(2;5)$-öt, a $\underline{b}_2 = (0;2)$-höz a $(2;1)$-et rendeli.
a) Adjuk meg f-nek az $[f]_B$ mátrixát a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerint.
b) Adjuk meg f-nek az $[f]$ mátrixát.

---

2. A sík egy lineáris transzformációjáról tudjuk, hogy az $(5,3)$ vektor képe a $(3,2)$ vektor, a $(4,3)$ vektor képe pedig a $(2,1)$ vektor. Mi lesz a $(11,6)$ és a $(6,11)$ vektorok képe?

3. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1,2),\ (1,0)\}$ bázisban.

4. a) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^3$-nek, aminek a képtere és a magtere azonos?
b) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^4$-nek, aminek a képtere és a magtere azonos?

5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ egy bázis $\mathbb{R}^2$-ben és legyen $[f]_B$ a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. (≈ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Legyen A olyan négyzetes mátrix, amelyre az $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ egyenletnek minden λ valós értékre legfeljebb egy $\underline{x}$ megoldása van. Bizonyítsuk be, hogy
a) A-nak létezik inverze;
b) Az $A^{-1}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ egyenletnek is legfeljebb egy $\underline{x}$ megoldása van minden λ valós értékre.

---

7. Legyen f az $\mathbb{R}^3$ olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

8. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1;2;3)$, $\underline{b}_2 = (2;3;4)$ és f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3;6;5)$. (≈ZH, 2010. december 6.)

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az origóhoz az origót rendeli, minden más vektorhoz pedig az $(1,1), (2,2), (3,3)$ vektorok valamelyikét? (ZH, 2013. április 25.)

10. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1 = (1,0)$ és $\underline{b}_2 = (1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. (≈ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

11. Előfordulhat-e, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixát két különböző bázisban felírva az alábbi eredményeket kapjuk?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$, illetve $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n\}$ két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \dots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \dots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[f]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[f]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. (≈ZH, 2012. december 3.)