Bevezetés a Számításelméletbe I.
Nyolcadik gyakorlat, 2014. október 28.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a $\operatorname{Ker} f$ magteret és az $\operatorname{Im} f$ képteret, valamint ezek dimenzióját.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f: (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$;

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz annak az x tengelyre vett tükörképét rendeli;

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb.

---

2. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a $\operatorname{Ker} f$ magteret és az $\operatorname{Im} f$ képteret, valamint ezek dimenzióját.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $f(\underline{v})$ utolsó koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege, $f(\underline{v})$ többi koordinátája pedig megegyezik $\underline{v}$ megfelelő koordinátájával;

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f: (x, y, z) \mapsto (|x|, |y|, |z|)$;

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

3. Az $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2, 6)$ vektorhoz a $(14, 16, 14)$ vektort, az $(1, -3)$ vektorhoz pedig az $(1, -10, -5)$ vektort rendeli.

a) Írjuk fel f mátrixát.

b) Mit rendel f a $(4, -1)$ vektorhoz?

c) A p paraméter milyen értékére teljesül a $(9, -9, p) \in \operatorname{Im} f$ állítás?

4. Az $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

- Tetszőleges 7 $\mathbb{R}^n$-beli vektor képe lineárisan összefüggő;
- Tetszőleges 8 lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli vektor között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n \le 13$. (≈ZH, 2003. december 2.)

5. Az $f: \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa látható jobbra. Határozzuk meg $\dim \operatorname{Im} f$ és $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét és adjunk meg egy-egy bázist az $\operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f$ alterekben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

---

6. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a $\operatorname{Ker} f$ magteret és az $\operatorname{Im} f$ képteret, valamint ezek dimenzióját.

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f: (x, y, z) \mapsto (3x - 5y + 7z, -4x + 2y - 6z, x + 3y - z)$.

c) $f: \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$, minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^{100}$ és minden $1 \le i \le 100$ esetén $f(\underline{v})$ i-edik koordinátája a $\underline{v}$ első i koordinátájának összege;

7. Az $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ és a $(3, 4)$ vektorhoz is az $(5, 6)$ vektort rendeli.

a) Írjuk fel f mátrixát.

b) Mit rendel f a $(99, 100)$ vektorhoz?

c) Igaz-e az $(55, 55) \in \operatorname{Im} f$ állítás?

d) Igaz-e az $(55, 55) \in \operatorname{Ker} f$ állítás?

8. Van-e inverze az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f: (x, y, z) \mapsto (x - 3y + 7z, -x + 3y - 6z, 2x - 5y + 12z)$ függvénynek? Ha igen, adjuk meg az f^{-1} inverz függvény hozzárendelési szabályát. (Ismert, hogy az $f: A \to B$ függvénynek akkor létezik inverze, ha minden $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \ne a_2$ esetén $f(a_1) \ne f(a_2)$; ebben az esetben pedig az $f^{-1}: B' \to A$ inverz függvényre $f^{-1}(b) = a$ akkor igaz, ha $f(a) = b$, ahol $B' \subseteq B$ az f értékkészlete.)

9. Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen $A = [f]$ az f mátrixa. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

a) Ha $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor $\operatorname{Ker} f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

c) Ha $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$, akkor $A^2 = 0$.

d) Ha $A^2 = 0$, akkor $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$.

10. Legyen $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\mathbb{R}^m$-ben.

b) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} f$-ben.

c) Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független rendszer, akkor $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ is lineárisan független rendszer.

d) Ha $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_k)$ lineárisan független rendszer, akkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ is lineárisan független rendszer.

11. Mutassuk meg, hogy ha az $n \times n$-es A és B mátrixokra $A \cdot B = 0$ teljesül, akkor $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \le n$.