Bevezetés a Számításelméletbe I.

Hetedik gyakorlat, 2014. október 21.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki.(ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

---

3. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (ZH, 2011. november 24.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

5. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

6. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix.

a) Mutassuk meg, hogy létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre $A \cdot B$ a 2×2-es egységmátrix.

b) Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre $B \cdot A$ a 3×3-as egységmátrix.

(ZH, 2013. november 28., 2013. december 9.)

---

7. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ZH, 2012. december 11.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

8. A p paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját. (ZH, 2013. december 9., 2011. december 5.)

a) $\begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2p & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & -12 & 0 \\ 5 & 22 & 19 & p & p+3 \end{pmatrix}$

9. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli). (ZH, 2006. október 26.)

10. Legyenek A és B 3×3-as mátrixok, melyekre $\mathrm{r}(A) = 3$ és $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesülnek (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz; *(ii)* az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (A és B választásától függően).

a) $\mathrm{r}(A^3) = 3$ b) $\mathrm{r}(B^3) = 3$ c) $\mathrm{r}(B^3) = 2$

(A^3, illetve B^3 az $A \cdot A \cdot A$, illetve a $B \cdot B \cdot B$ szorzatot jelöli.) (ZH, 2010. december 15.)

11. Az $n \times n$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$. b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó. (ZH, 2006. október 26.)

12. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások fennállnak tetszőleges A és B mátrixokra (feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők rajtuk).

a) $\mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A)$ b) $\mathrm{r}(A + B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$