Bevezetés a Számításelméletbe I.

Ötödik gyakorlat, 2014. október 7.

1. Számítsuk ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét. (ZH, 2012. október 18.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét. (ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

---

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$$

4. Számítsuk ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsokat.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ b) $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$ c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

6. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme ± 1 Bizonyítsuk be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.

---

7. A jobbra látható determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 23?

(ZH, 2010. december 15.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 22 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{vmatrix}$$

8. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok. (ZH, 2011. október 20.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

9. Az alábbi determinánsban a, b, c és d valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

10. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = i \cdot j$ b) $a_{i,j} = \min\{i, j\}$ c) $a_{ij} = 2^i + 5j + 3$

11. Hogyan változik meg egy 10×10-es mátrix determinánsának az értéke, ha a következő műveleteket végezzük rajta?

a) A mátrix minden elemét megszorozzuk 2-vel.

b) A 3. és a 7. sorhoz (tagonként) hozzáadjuk ennek a két sornak a (tagonként vett) különbségét. (A két sor különbsége alatt azt értjük, hogy a 3. sor elemeiből vonjuk ki a 7. sor megfelelő elemeit).

c) Minden $1 \leq i, j \leq 10$ esetén az i-edik sor j-edik elemét $\frac{i}{j}$-vel szorozzuk.

12. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004} \text{ -nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát. (ZH, 2004. november 4.)

13. Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának. (ZH, 2008. október 21.)

14. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$