

1. Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket (a b)feladat esetében a  $p$  valós paraméter minden értékére).

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 = -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 = 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 = 21 \end{array} \\ \text{b)} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 = -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 = 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 = p \end{array} \end{array}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében. (ZH, 2005. november 22.)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 16 \end{array}$$

3. Döntsük el, hogy a  $c$  valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2011. szeptember 26.)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ -2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + c \cdot x_4 + (c - 15) \cdot x_5 = 13 \end{array}$$

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi,  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorrendszerek?

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 10 \\ 23 \\ 0 \\ 17 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -2 \\ -9 \\ 11 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 4 \\ 12 \\ -2 \\ 7 \end{array} \right) \\ \text{b)} \quad \left( \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right) \end{array}$$

5. Oldjuk meg az alábbi  $n$  ismeretlenes és  $n$  egyenletből álló egyenletrendszereket.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = n - 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = n - 2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{array} \\ \text{b)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_n + x_1 = 1 \end{array} \end{array}$$

6. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  síkok (összes) metszéspontját. (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} S_1: x + y + z = 6 \\ S_2: 2x + 3y - 2z = 0 \\ S_3: 5x + 7y - 3z = 6 \end{array} \\ \text{b)} \quad \begin{array}{l} S_1: 2x - y + 5z = 3 \\ S_2: 3x + 2y + 6z = 4 \\ S_3: 4x - 9y + 13z = 9 \end{array} \end{array}$$

7. Döntsük el, hogy a  $c$  valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2004. december 14., 2004. november 4.)

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} -x + 3y - z - 3w = -2 \\ 2x - 6y + 5z + 12w = 7 \\ 3x - 9y + 5z + cw = 9 \end{array} \\ \text{b)} \quad \begin{array}{l} 2x + 6y + z = -6 \\ 2x + 11y + 11z = 14 \\ 4x + 10y + cz = -20 \\ 2x + 9y + (c + 10)z = 6 \end{array} \end{array}$$

8. Igaz-e az alábbi  $\underline{v}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$  vektorokra a  $\underline{v} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$  állítás?

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

9. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire alkot bázist  $\mathbb{R}^4$ -ben a  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$  vektorrendszer? A  $p$ -nek ezekre az értékeire határozzuk meg a  $[\underline{v}]_B$  koordinátavektort.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -19 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \underline{b}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ -5 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -5 \\ -48 \\ -19 + 3p \end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

- a) nincs megoldása;                      b) végtelen sok megoldása van?