Bevezetés a Számításelméletbe I.

Harmadik gyakorlat, 2014. szeptember 23.

1. Jelölje $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a Második gyakorlat **2.** feladatában bevezetett $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat.

a) Bázist alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{a}$ vektorrendszer?

b) Bázist alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{b}$ vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg $\underline{a}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint!

c) Bázist alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{c}$ vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg $\underline{c}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint!

2. Adjunk meg egy bázist az alábbi alterekben és határozzuk meg a dimenziójukat!

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 5x - 6y + 9z = 0 \right\}$ b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$

---

3. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2014 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el az alábbi vektorrendszerekről, hogy bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben és ha igen, határozzuk meg a hiányzó, negyedik vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

a) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ b) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$

4. Az alábbi V alterekben adjunk meg egy olyan bázist, amely a megadott $\underline{v}$ vektort tartalmazza, valamint határozzuk meg V dimenzióját.

a) V azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyekben a felső két koordináta összege megegyezik az alsó kettő összegével; $\underline{v}$-nek mind a négy koordinátája 1.

b) V azokból az $\mathbb{R}^{100}$-beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak; $\underline{v}$ ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7.

5. A $V \leq \mathbb{R}^n$ altérre $\dim V = k$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak V-ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ bázis V-ben?

6. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? ($\approx$ZH, 2004. december 14.)

---

7. Jelölje $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{a}$ a jobbra látható vektorokat. Adjunk meg $\mathbb{R}^4$-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Jelölje $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ és $\underline{v}$ a jobbra látható vektorokat. A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p-nek erre az értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol B a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ vektorrendszert jelöli.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}$$

9. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. A p paraméter mely értékeire teljesül, hogy a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $\underline{v}_2 - \underline{v}_3$, $\ldots$, $\underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k$, $\underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$ vektorok szintén bázist alkotnak V-ben?

10. Határozzuk meg a Második gyakorlat **7.** feladatában definiált $\mathbb{R}^5$-beli altér dimenzióját.

11. Tudjuk, hogy a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? ($\approx$ZH, 2007. október 24.)

12. Az $\mathbb{R}^{99}$-beli V és W alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy V-nek és W-nek van a nullvektortól különböző közös eleme.

13. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k\}$ két bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben! ($\approx$ZH, 2012. október 18.)