Bevezetés a Számításelméletbe I.

Második gyakorlat, 2014. szeptember 15.

1. Döntsd el, hogy $\mathbb{R}^4$-ben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) V azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyeknek minden koordinátája 0 és 1 között van (megengedve a 0-t és az 1-et is).

b) W azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyekben az első koordináta egyenlő a negyedikkel.

2. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 201 \\ 2014 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}, \underline{c}$

---

3. Döntsd el, hogy $\mathbb{R}^6$-ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) V azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b) W azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból áll, amelyekben a felső három koordináta összege megegyezik az alsó három összegével.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}$ c) $\underline{u}, \underline{a}$ d) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ e) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}$

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben (egy tetszőleges n-re). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy $\underline{v}_1$ benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1 = \underline{0}$!

---

7. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben? (ZH, 2012. október 18.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszerek generált alterét. Amennyiben ez az altér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenlet(rendszer)ét.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a jobbra látható, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok.

a) Mutassuk meg, hogy $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan függetlenek.

b) Kiegészíthető-e $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ egyetlen további vektorral úgy, hogy ezzel generátorrendszert kapjunk $\mathbb{R}^4$-ben?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli vektorok (valamely n-re) és legyen $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is lineárisan független.

11. Az $A(2;5;1)$, $B(5;7;4)$, $C(6;4;2)$ és $D(9;7;5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét! (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.) (ZH, 2011. december 5.)

12. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3;1;-1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi sem az $\frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2}$ egyenletrendszerű e_1, sem az $\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z-4$ egyenletrendszerű e_2 egyenessel! (ZH, 2011. október 20.)