

1. a) Írjuk fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!

b) Írjuk fel a $Q(2, -5, -2)$ ponton átmenő és a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét!

2. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból (az \mathbb{R}^4 -beli műveletekkel) az \underline{a} vektor?

b) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból a \underline{b} vektor?

c) Mely \mathbb{R}^4 -beli vektorok fejezhetők ki \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} segítségével? (Készítsünk olyan „tesztet”, amellyel egy tetszőleges \mathbb{R}^4 -beli vektorra a kérdés egyszerűen és gyorsan megválaszolható!)

3. Átmege-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1; 5; 5)$ pontot? (ZH, 2010. október 21.)

4. Döntsük el, hogy a $P(2, 7, 3)$ és a $Q(6, 3, 5)$ pontokon átmenő egyenesen rajta van-e az $R(12, -3, 8)$ pont. (ZH, 2006. október 26.)

5. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben (\mathbb{R}^3 -ben)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból (az \mathbb{R}^3 -beli műveletekkel) az \underline{a} vektor?

b) Az \mathbb{R}^3 mely vektorai fejezhetők ki az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból? (Készítsünk „tesztet”!)

c) Az \mathbb{R}^3 mely vektorai fejezhetők ki az \underline{u} és \underline{v} vektorokból? (Készítsünk „tesztet”!)

d) Milyen geometriai alakzatot határoznak meg a c) feladat megoldásai?

6. A $2x + y - 3z = 2$ egyenletű S_1 és az $x + 7y + 3z = 21$ egyenletű S_2 síkok esetében döntsük el, hogy

a) rajta van-e a $P(5; 1; 3)$ pont az S_1 és az S_2 metszésvonalán;

b) merőleges-e egymásra S_1 és S_2 ? (ZH, 2011. december 13.)

7. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmege a $P(12; 1; 7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x - 3 = \frac{y - 2}{3} = \frac{-z - 1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest! (ZH, 2010. december 6.)

8. Döntsük el, hogy a $P(1, 4, 4)$ és a $Q(3, 12, -2)$ pontokon átmenő egyenes metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét. Ha a válasz igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t! (ZH, 2006. november 9.)

9. Írjuk fel a háromdimenziós tér $P = (1, 1, 1)$ és $Q = (3, 1, 5)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az y tengelyt? (ZH, 2013. október 24.)

10. Az \mathbb{R}^4 mely vektorai fejezhetők ki az

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és a } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok segítségével? (Készítsünk „tesztet”!)

12.a) Adjuk meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy a $2x + 3y - z = 6$, a $x - 3y + 2z = 5$ és a $4x - 3y + pz = q$ egyenletű síkok egy egyenesre illeszkedjenek!

b) Most úgy válasszuk meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk!

c) Az eddigieken kívül milyen helyzetben lehet egymáshoz képest három sík a térben? Ezek közül melyek valósulhatnak meg p és q alkalmas megválasztásával?

11. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmege a $P(1; 3; 4)$ és a $Q(3; 6; 10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y+4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel! (ZH, 2012. október 18.)