

1. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az \underline{u} , \underline{v} , illetve \underline{w} vektorok?
b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Milyen maradékot ad
a) 70^{70} 23-mal osztva;

b) 55^{100} 48-cal osztva?

3. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat!

a) $3x \equiv 2 \pmod{5}$

b) $32x \equiv 12 \pmod{82}$

c) $5x \equiv 1 \pmod{28}$

4. A jobbra látható A mátrixról és \underline{v} vektorról tudjuk, hogy \underline{v} sajátvektora A -nak.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.

- b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét.

(ZH, 2010. december 15.)

5. Milyen maradékot ad

a) 2013^{6543} 2014-gyel osztva;

b) 1025^{1005} 1023-mal osztva?

c) 138^{139} 65-tel osztva?

6. a) Milyen maradékot adhat egy egész szám 34-gyel osztva, ha a 26-szorosa 16 maradékot ad 34-gyel osztva?

- b) Valamely n egészre teljesül, hogy $41n - 27$ és $n + 1$ ugyanazt a maradékot adják 62-vel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

- c) Határozzuk meg az x kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy $78x + 1$ utolsó két számjegye, valamint $39x + 2$ utolsó két számjegye megegyezik.

7. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 4y)$.

- a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

- b) Adjunk meg \mathbb{R}^2 -ben egy $[f]$ sajátvektoraiból álló B bázist és írjuk fel $[f]_B$ -t ebben a bázisban.

8. Az 5×5 -ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

- a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A -nak.

- b) Adjuk meg A egy sajátvektorát.

(ZH, 2011. december 5.)

9. a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 2$ sajátértéke a jobbra látható A mátrixnak.

- b) Adjuk meg A egy sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2011. november 24.)

10. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

a) 2001^{2014}

b) $99^{77^{55}}$

c) 51^{151}

d) $\frac{51^{151}}{9}$

11. a) Egy egész szám 222-vel vett osztási maradéka 4-gyel kisebb, mint a szám 60-szorosának a 222-vel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 222-vel osztva? (ZH, 2013. április 25.)

- b) Egy egész számra teljesül, hogy $37n + 9$ és $n + 10$ azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék? (ZH, 2013. május 16.)

- c) Milyen maradékot adhat az n egész szám 202-vel osztva, ha $53n - 1$ osztható 202-vel? (ZH, 2011. május 17.)

- d) Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciát: $170x \equiv 78 \pmod{2006}$. (ZH, 2004. április 29.)

- e) Határozzuk meg mindazon n egész számokat, melyekre $3n + 1 \equiv 6 \pmod{2n}$ teljesül. (ZH, 2008. május 7.)

12. Az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z)$.

- a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

- b) Van-e \mathbb{R}^3 -ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B -t és írjuk fel $[f]_B$ -t.

13. Legyenek \underline{u} és \underline{v} az $n \times n$ -es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora

- a) A -nak;

- b) A^2 -nek?

(\approx ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)

14. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy bázis \mathbb{R}^n -ben.

- a) Mutassuk meg, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ mátrixok sajátértékei azonosak.

- b) Igaz-e, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?