Bevezetés a Számításelméletbe I. — Tizedik gyakorlat

25. kurzus, 2013. november 14.

1. Add meg az alábbi lineáris leképezések magterét, képterét és ezek dimenzióját!

a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az x-tengelyre vett tükrözés b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x,y,z) = (x-y+z, x-y+z)$

2. Keresd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét és sajátvektorát!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az x-tengelyre vett tükrözés. Határozd meg $\mathcal{A}$ minden sajátértékét és sajátvektorát!

---

4. Add meg az alábbi lineáris leképezések magterét, képterét és ezek dimenzióját!

a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(\underline{v})$ az az x tengelyre eső vektor, aminek az első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege.

b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,z)$

5. Legyen V három, W kettő dimenziós vektortér, továbbá legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis W-ben. Az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa a B és C bázisok szerint a jobb oldalon látható mátrix. Igazak-e az alábbi állítások?

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 + 3\underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ b) $\underline{c}_1 + 2\underline{c}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ (ZH, 2010. december 15.)

6. Keresd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.) (ZH, 2011. december 5.)

a) Mutasd meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak!

b) Add meg A egy sajátvektorát!

8. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás? (ZH, 2012. november 22.)

9. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak. (ZH, 2010. december 15.)

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét!

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x+y; x+z; x+2y+2z)$ vektort rendeli. (ZH, 2012. november 22.)

a) Igaz-e, hogy az $(1;2;5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?

11. Az $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

b. Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$. (ZH, 2003. december 2.)

12. Határozd meg az alábbi $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációik sajátértékeit, sajátvektorait!

a) az a leképezés, amely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli;

b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(\underline{v})$ az az x tengelyre eső vektor, aminek az első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege.

c) az origó körüli $+20°$-os forgatás.

13. Az (5×5)-ös A mátrix főátlójának minden eleme 2, a mátrix összes többi eleme 1.

a) Adjuk meg A egy sajátértékét! b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

(ZH, 2010. december 6.)

14. Legyen A olyan négyzetes mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke. Bizonyítsuk be, hogy

a) A-nak létezik inverze; b) A^{-1}-nek sincs valós sajátértéke.

15. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort! (ZH, 2002. december 5.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

16. Legyen U a legföljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomok (szokásos) vektortere. Határozd meg az alábbi $U \mapsto U$ lineáris transzformációik sajátértékeit, sajátvektorait! Minden polinomnak feleltessük meg

a) a deriváltját; b) a deriváltjának x-szeresét.

17. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke? (ZH, 2007. november 28.) ($\mathcal{A}^3$ az $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ transzformációt jelöli.)

18. Melyek igazak az alábbi állítások közül (tetszőleges vektortérben)? ($\mathcal{A}^2$ az $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ leképezést jelöli, $\mathcal{O}$-val azt a leképezést jelöltük, ami minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli.)

a) Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.
b) Ha 0 sajátértéke $\mathcal{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathcal{A}$-nak.
c) Ha $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 az egyetlen sajátértéke.
d) $\mathcal{A}$ minden sajátvektora $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ és $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ közül legalább az egyiknek eleme.

19. Legyen U a legfeljebb 100-adfokú, valós együtthatós polinomok vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi U-ról U-ba menő hozzárendelések lineáris transzformációk-e? Ha igen, írd fel a leképezés mátrixát az $\{x^{100}, x^{99}, \ldots, x, 1\}$ bázis szerint; határozd meg a magterét, képterét és azok dimenzióit; határozd meg a sajátértékeit és a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat! Minden $f \in U$ polinomnak feleltessük meg

a) deriváltját; b) az $x^{100} + 1$ polinomot; c) az $a_0 \cdot x$ polinomot, ahol a_0 az f konstans tagja.