Bevezetés a Számításelméletbe I. — Kilencedik gyakorlat

25. kurzus, 2013. november 4.

1. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ függvény a tér minden (x, y, z) vektorához a sík $(x-y+z, x-y+z)$ vektorát rendeli.

a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés!

b) Legyen $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a tér, $C = \{(1,0), (0,1)\}$ pedig a sík „szokásos" bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B és C bázisok szerint!

c) Legyen $B' = \{(2,0,-1), (-1,2,0), (0,-1,2)\}$ a tér, $C' = \{(1,2), (0,1)\}$ pedig a sík (egy-egy másik) bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B' és C' bázisok szerint is!

d) Hová viszi $\mathcal{A}$ az $(2,-1,1)$ vektort? Számítsd ki a definíció és az előző pontban kapott mátrix segítségével is!

2. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. (ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

---

3. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, írd fel a mátrixukat a „szokásos" bázisok (azaz $\mathbb{R}^3$-ben az $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1,0), (0,1)\}$) szerint!

a) $\mathcal{A} : (x,y,z) \mapsto (x,z)$ b) $\mathcal{B} : (x,y,z) \mapsto (x \cdot y, x \cdot z)$ c) $\mathcal{C} : (x,y,z) \mapsto (x+y, x+z)$

4. Írd fel az előző feladat lineáris leképezéseinek mátrixát a B' és C' bázisok szerint, ahol $B' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ és $C' = \{(1,1), (1,0)\}$! Határozd meg kétféle módon, hogy hová viszi $\mathcal{A}$ az $(1,2,3)$ vektort!

5. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(1;1;1), (0;1;1), (0;0;1)\}$ és $C = \{(2;1), (2;-1)\}$. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $(3;2;1)$ vektorhoz? (ZH, 2011. november 24.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(2;3), (2;5)\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$, ahol $\underline{c}_1 = (1;2;1)$ (de $\underline{c}_2$ és $\underline{c}_3$ nem ismert.) Határozzuk meg a $\underline{c}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $(6;11)$ vektorhoz az $(1;6;7)$ vektort rendeli!(ZH, 2011. december 5.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1;2;3)$, $\underline{b}_2 = (2;3;4)$ és $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható A mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3;6;5)$! (ZH, 2010. december 6.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Jelölje U a legföljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok (vagyis ax^2+bx+c alakú kifejezések, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$) vektorterét (a polinomok szokásos összeadás és skalárral szorzás műveletével). Az $\mathcal{A} : U \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés $x^2 + x + 1$-hez $(3;3)$-at, $2x + 3$-hoz $(4;5)$-öt és $2x + 2$-höz $(2;6)$-ot rendel.

a) Mit rendel $\mathcal{A}$ $x^2 + 2x + 2$-höz?

b) Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a $B = \{x^2, x, 1\}$, $C = \{(1;0), (0;1)\}$ bázisok szerint!

c) Mi $\mathcal{A}$ „képlete" (vagyis mit rendel $ax^2 + bx + c$-hez)?

---

9. Legyen $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1;1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4;3)$ vektor, az $(1;0)$ képe pedig a $(-1;2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a „szokásos" bázisban! (ZH, 2009. december 1.)

10. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1,0)$ és $\underline{b}_2 = (1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre $\mathcal{A}$ az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét! (ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

11. Legyen U a legfeljebb 100-adfokú, valós együtthatós polinomok vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi U-ról U-ba menő hozzárendelések lineáris transzformációk-e? Ha igen, írd fel a leképezés mátrixát az $\{x^{100}, x^{99}, \ldots, x, 1\}$ bázis szerint! Minden $f \in U$ polinomnak feleltessük meg

a) deriváltját; b) az $x^{100} + 1$ polinomot; c) az $a_0 \cdot x$ polinomot, ahol a_0 az f konstans tagja.