

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Számold ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

3. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Számold ki az alábbi determinánsokat!

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$$

5. Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij}$ . Határozd meg  $A$  determinánsát, ha

$$\text{a) } a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

$$\text{b) } a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{ZH, 2009. október 20.})$$

6. Az alábbi determinánsban  $a, b, c$  és  $d$  valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

(ZH, 2003. november 6.)

7. Egy  $n \times n$ -es mátrix minden eleme  $\pm 1$  Bizonyítsd be, hogy a determinánsa osztható  $2^{n-1}$ -nel!

8. Mennyi az  $1, 2, \dots, n$  elemek alábbi permutációinak inverziószáma?

$$\text{a) } 1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2 \quad (n = 9)$$

$$\text{b) } 100, 101, 98, 99, 96, 97, \dots, 2, 3, 1 \quad (n = 101)$$

9. A jobbra látható determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 23?

(ZH, 2010. december 15.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 22 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{vmatrix}$$

10. Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij}$ . Határozd meg  $A$  determinánsát, ha

$$\text{a) } a_{ij} = i \cdot j$$

$$\text{b) } a_{i,j} = \min\{i, j\}$$

$$\text{c) } a_{ij} = i^2 j^2 + 1 \quad (\text{ZH, 2002. december 10.})$$

11. A  $101 \times 101$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004} & \text{-nek a } (2i + j)\text{-edik számjegye, ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg  $A$  determinánsát! (ZH, 2004. november 4.)

12. Egy  $n \times n$ -es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának. (ZH, 2008. október 21.)

13\*. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$

Hasznos összefüggések a determinánsokkal kapcsolatban:

- Ha egy determináns egyik sorának valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorához, a determináns értéke nem változik.
- Ha egy determináns egyik sorának minden elemét elosztjuk  $\alpha$ -val, akkor a determináns értéke  $\alpha$ -ad részére csökken. Másképp mondva, a determináns egy sorából tetszőleges érték kiemelhető a determináns elé.
- Ha egy determináns egyik sorának minden eleme 0, akkor a determináns értéke 0.
- Ha egy determináns egyik sora a másik sor valahányszorososa, akkor a determináns értéke 0.
- Ha a determináns főátlója alatt vagy felett minden elem 0, akkor a determináns értéke a főátló elemeinek szorzata.

Az összes felsorolt összefüggés igaz sorok helyett oszlopokra is.