Bevezetés a Számításelméletbe I. — Ötödik gyakorlat
25. kurzus, 2013. október 7.

1. Egy 100 dimenziós V vektortérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak V-ben! (ZH, 2011. október 20.)

2. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u} \in V, \underline{u} \neq \underline{0}$ esetén léteznej olyan α_1, α_2, ..., α_{100} skalárok, amelyekre $\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}$, $\underline{v}_2 + \alpha_2\underline{u}$, ..., $\underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V dimenzióját! (ZH, 2011. december 5.)

3. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ..., $\underline{u}_{99}$ és a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_{100}$ vektorrendszerek egyaránt lineárisan függetlenek a V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_{100}$ vektorok közül kiválasztható egy olyan $\underline{v}_i$, amelyre az $\underline{u}_1 + \underline{v}_i$, $\underline{u}_2 + \underline{v}_i$, ..., $\underline{u}_{99} + \underline{v}_i$ vektorok szintén lineárisan függetlenek! (ZH, 2011. december 13.)

4. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben! (ZH, 2012. október 18.)

5. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból vektorokból, amelyekben a (fölülről szmítva) harmadiktól kezdve mindegyik elem a fölötte álló két elem átlaga. Határozzuk meg dim$W$ értékét! (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.) (ZH, 2012. december 3.)

---

1. tétel. *(Újonnan érkező vektor lemmája) Ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ lineárisan függetlenek, de $\underline{v}_{k+1}$ hozzávételével lineárisan összefüggővé válnak, akkor $\underline{v}_{k+1}$ kifejezhető $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ lineáris kombinációjaként, vagyis $\underline{v}_{k+1} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \rangle$.*

2. tétel. *(Újonnan érkező vektor lemmája átfogalmazva) Ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ lineárisan függetlenek, és $\underline{v}_{k+1}$ nem fejezhető ki belük lineáris kombinációval (vagyis $\underline{v}_{k+1} \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \rangle$), akkor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$, $\underline{v}_{k+1}$ is lineárisan függetlenek.*

3. tétel. *Ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ..., $\underline{u}_n$ pedig generátorrendszert alkotnak, akkor $k \leq n$. (Kiegészítés: $k \leq \dim V \leq n$)*

4. tétel. *Ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek a V vektortérben, akkor bázissá bővíthetők.*

Bizonyítás: Tekintsük $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \rangle$-t! Ha $W = V$, akkor a $\underline{v}_i$ vektorok bázist alkotnak. Ha nem, akkor van olyan $\underline{v}_{k+1}$, ami nincs benne W-ben; ezt hozzávéve az eddigi vektorokhoz továbbra is lineárisan független rendszert kapunk. (Ld. újonnan érkező vektor lemmája.) Mivel egy ilyen lépés során dim$W$ 1-gyel nő, véges sok lépésen belül bázishoz jutunk. □

5. tétel. *Ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak a V vektortérben, akkor elhagyható közülük néhány úgy, hogy bázist kapjunk.*

Bizonyítás: Ha semelyik $\underline{v}_i$ nem fejezhető ki a többiből, akkor lineárisan függetlenek a vektorok, és készen vagyunk. Ha valamelyik függ a többitől, akkor annak elhagyásával továbbra is generátorrendszert kapunk, hiszen tetszőleges u vektor továbbra is kifejezhető belőlük: az elhagyott vektort a többiből kikombinálva, majd ezt a kombinációt az u-nak az eredeti vektorokkal történő kifejezésébe beírva kifejeztük az u-t az elhagyott vektor nélkül. Ezt ismételve legfeljebb $k-1$ lépésben linárisan független rendszerhez jutunk. (Mivel egyetlen vektor önmagában biztosan linárisan független.) □

6. tétel. *Ha $\dim V = n$ és $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ..., $\underline{v}_n$ lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak V-ben.*

Bizonyítás: Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ nem lenne generátorrendszer, akkor lenne olyan vektor, ami nem fejezhető ki a $\underline{v}_i$ vektorokból; ezt a vektort hozzávéve az eddigi vektorokhoz továbbra is lineárisan független rendszert kapnánk (újonnan érkező vektor lemmája), így egy n dimenziós térben $n+1$ lineárisan független vektorhoz jutunk, ami lehetetlen. □

7. tétel. *Ha* $\dim V = n$ *és* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ *generátorrendszert alkotnak, akkor bázist alkotnak* V*-ben.*

Bizonyítás: Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ nem lenne lineárisan független, akkor lenne olyan v_i, ami kifejezhető a többiből, és így elhagyható a generátorrendszerből. Így azonban egy n dimenziós térben egy $n-1$ dimenziós generátorrendszerhez jutnánk, ami lehetetlen. $\square$