Bevezetés a Számításelméletbe I. — Negyedik gyakorlat

25. kurzus, 2013. október 1.

1. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ a (tetszőleges) V vektortér vektorai, amelyekre $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következõ lehetõségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz; *(ii)* az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függõen).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ (ZH, 2010. október 21.)

2. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszert! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

$$\begin{aligned}
2x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 &= 2 \\
3x_1 + 15x_2 + 11x_3 + 6x_4 &= 8 \\
5x_1 + 25x_2 + 13x_3 - x_4 &= 8 \\
2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 4
\end{aligned}$$

3. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét! (Tipp: az egyenletrendszer bal oldala ugyanaz mindkét esetben.)

a)
$$\begin{aligned}
2x_1 + 10x_2 + -2x_3 + 4x_4 &= 2 \\
5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\
-x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\
3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= 21
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
2x_1 + 10x_2 + -2x_3 + 4x_4 &= 2 \\
5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\
-x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\
3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= 22
\end{aligned}$$

---

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek?

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2011. október 20.)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 &= 4 \\
3x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\
-2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 &= 6 \\
2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + c \cdot x_4 + (c-15) \cdot x_5 &= 13
\end{aligned}$$

6. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^{100}$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) U azokból a számoszlopokból áll, amelyeknek minden tagja 0 és 1 között van.

b) V azokból a számoszlopokból áll, amelyekben a számok fölülrõl lefelé növekvõ sorrendben állnak.

c) W azokból a számoszlopokból áll, amelyekben a felsõ 50 szám összege megegyezik az alsó 50 összegével.

7. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyrõl tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmû. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), elõfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása;

b) végtelen sok megoldása van?

8. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében! (ZH, 2005. november 22.)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\
2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 28 \\
x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 16
\end{aligned}$$

9. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2006. október 26.)

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\
&5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 26x_4 = 4 \\
&2x_1 + 6x_2 + c \cdot x_4 = 4 \\
&4x_1 + 12x_2 + x_3 + (c+14) \cdot x_4 = 11
\end{aligned}$$

10. Oldd meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletbõl álló egyenletrendszereket!

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n &= n-1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n &= n-2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

11. Döntsük el, hogy az alábbi $\underline{v}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra igaz-e a $\underline{v} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás!

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

12. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok? (ZH, 2008. december 2.)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -19 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ -5 \\ p \end{pmatrix}$$