Bevezetés a Számításelméletbe I. — Hetedik gyakorlat

25. kurzus, 2012. október 29.

1. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2011} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

2. Számítsd ki az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Számold ki az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

---

4. Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2006. október 26.)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

5. a) Bizonyítsd be, hogy $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$! (Feltéve, hogy A és B invertálható.)

b) Bizonyítsd be, hogy $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$! Segítség: előadáson szerepelt, hogy $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

6. Számítsd ki az alábbi mátrixok rangját!

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

7. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n\times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A\cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

8. a) Legyen A olyan $n\times n$-es mátrix, amire $\det A \neq 0$, B pedig tetszőleges $n\times n$-es mátrix. Igaz-e, hogy létezik olyan $n\times n$-es X mátrix, amire $AX = B$? (ZH, 2009. december 1.)

b) Az A és B $n\times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $A\cdot B = \underline{\underline{0}}$. Határozd meg a B mátrixot! (Itt $\underline{\underline{0}}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

9. A c paraméter minden valós értékére határozd meg az alábbi mátrixok rangját!

a) $$\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2006. november 9.)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2003. január 9.)

10. Tegyük fel, hogy az $n\times n$-es A, B, C mátrixokra az $A\cdot X = B$ egyenlet megoldható, de az $A\cdot X = C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n\times n$-es D mátrix, amelyre a $B\cdot X = D$ nem megoldható! (ZH, 2011. december 5.)

---

11. Legyen A olyan $n\times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

12. Tegyük fel, hogy az A, B, C $n\times n$-es mátrixok mindegyikének van inverze. Igaz-e, hogy ekkor az ABC szorzatmátrix is invertálható? Igaz-e az állítás megfordítása, vagyis abból, hogy ABC invertálható, következik-e, hogy A, B és C mindegyike külön-külön invertálható?

13. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1}B^{-1}$ szorzatot!