

1. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Értelmezzük V -n a \oplus vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való \odot szorzását a következőképpen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ és $\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}$.
Dönts el, hogy a V halmaz a most definiált \oplus és \odot művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2010. október 21.)

2. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3; 1; -1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi egyenletrendszerekkel megadott e_1 és e_2 egyenesek egyikével sem. (ZH, 2011. október 20.)

$$e_1 : \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2}$$

$$e_2 : \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z-4$$

3. Az $A(2; 5; 1)$, $B(5; 7; 4)$, $C(6; 4; 2)$ és $D(9; 7; 5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét! (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.) (ZH, 2011. december 5.)

4. Legyen $V = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Értelmezzük V -n a \oplus vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való \odot szorzását a következőképpen:

$$\underline{u} \oplus \underline{v} = u + v + 1$$

$$\lambda \odot \underline{v} = \lambda \cdot v + \lambda - 1$$

Dönts el, hogy a V halmaz a most definiált \oplus és \odot művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2006. november 9.)

5. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

- Valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással
- Pontosan n -edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással
- Legalább n -edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással
- Legfeljebb n -edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással

6. a) Add meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletű síkok egy egyenesre illeszkedjenek!

$$2x + 3y - z = 6$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$4x - 3y + pz = q$$

b) Most úgy válaszold meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk!

c) Az eddigieken kívül milyen helyzetben lehet egymáshoz képest három sík a térben? Ezek közül melyek valósulhatnak meg p és q alkalmas megválasztásával?

7. Legyen V a pozitív valós számok halmaza. Minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén legyen $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (vagyis \oplus a pozitív valós számok szorzását jelöli!) és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, valamint minden $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^\lambda$. Dönts el, hogy a V halmaz a most definiált \oplus és \odot művelettel vektorteret alkot-e!

8. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges V vektortérben minden $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén igazak az alábbi állítások!

- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
- $(-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$
- Ha $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$.