BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE I. — TIZEDIK GYAKORLAT

19. kurzus, 2011. november 7.

1. a) Legyen $\mathcal{A}: V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \underline{0}$ teljesül minden $\underline{v} \in V$-re. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$.

b) Legyen $\mathcal{A}: V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$. (ZH, 1997. november 1.)

2. Keresd meg az alábbi mátrixok összes sajátértékét! Mindegyik esetben keresd meg a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Határozd meg V alábbi lineáris transzformációinak magterét és képterét, ezek dimenzióját, a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $x = y$ egyenesre való vetítés.

b) az a leképezés, amely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli;

c) origó körüli $+90°$-os forgatás;

---

4. a) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^3$-nek (a szokásos háromdimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere megegyezik?

b) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^4$-nek (a szokásos négydimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere megegyezik?

5. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$). Ezeket értelemszerűen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. Így egy V vektorteret kapunk (ezt érdemes ellenőrizni). Mutasd meg, hogy az alábbi $\mathcal{A}: V \to V$ függvények lineáris transzformációk és határozd meg az összes sajátértéküket és sajátvektorukat! Minden polinomnak feleltessük meg

a) a deriváltját; b) a deriváltjának x-szeresét.

6. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!

b) Adjuk meg az A mátrix sajátvektorát! (ZH, 2010. november 25.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{v}_i \in v_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2-ben.

b) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban.

c) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban, akkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben.

d) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$, akkor $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

---

8. Legyen V három, W kettő dimenziós vektortér, továbbá legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis W-ben. Az $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi mátrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Igazak-e az alábbi állítások? (ZH, 2010. december 15.)

a) $\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 + 3\underline{b}_3 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ b) $\underline{c}_1 + 2\underline{c}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$

9. Az $\mathcal{A}: V \mapsto V$ lineáris transzformációra teljesül, hogy minden $\underline{v} \in V$-re $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \underline{v}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A}$-nak van sajátértéke, az csak 1 vagy -1 lehet!

b) Bizonyítsuk be, hogy valamelyik tényleg sajátértéke $\mathcal{A}$-nak! (ZH, 2002. december 12.)

10. Az $\mathcal{A}: V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

a) Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

b) Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$. (ZH, 2003. december 2.)