Bevezetés a Számításelméletbe I. — Harmadik gyakorlat
19. kurzus, 2011. szeptember 19.

1. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 201 \\ 2011 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, illetve bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben!

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}, \underline{c}$

2. Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

---

3. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, illetve bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben!

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}$ c) $\underline{u}, \underline{a}$ d) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ e) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}$

4. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy (tetszőleges) vektortér vektorai és legyen $\underline{u} = \underline{a}+\underline{b}$, $\underline{v} = \underline{b}-\underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{c}+2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

5. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát! (ZH, 2003. november 6.)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x+2y+z=0 \right\}$$

6. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ generátorrendszert alkotnak a V vektortérben. Bizonyítsd be, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ közül kiválasztható néhány (esetleg egy sem, esetleg mind) úgy, hogy a kiválasztott vektorok bázist alkossanak V-ben!

---

7. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mutasd meg, hogy $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^4$-ben!

b) Kiegészíthető-e $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ egy vagy több további vektorral úgy, hogy a kapott vektorrendszer bázis legyen $\mathbb{R}^4$-ben? Ha igen, adj meg ilyen vektor(oka)t!

8. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1-\underline{v}_2, \underline{v}_2-\underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1}-\underline{v}_k, \underline{v}_k-c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH, 1998. november 5.)

9. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d} = p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

10. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1+\underline{v}_2, \underline{v}_2+\underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99}+\underline{v}_{100}, \underline{v}_{100}+\underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

11. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ a nullvektortól különböző, tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén lineárisan függetlenek! (ZH, 2006. november 9.)

12. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme! (ZH, 2002. október 31.)