

1. a) Írd fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!

b) Írd fel a $Q(2, -5, -2)$ ponton átmenő és a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét!

2. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból (az \mathbb{R}^4 -beli műveletekkel) az \underline{a} vektor?

b) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból a \underline{b} vektor?

c) Mely \mathbb{R}^4 -beli vektorok fejezhetőek ki \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} segítségével? (Készíts olyan „tesztet”, amellyel egy tetszőleges \mathbb{R}^4 -beli vektorra a kérdés egyszerűen és gyorsan megválaszolható!)

3. Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1; 5; 5)$ pontot? (ZH, 2010. október 21.)

4. Döntsük el, hogy a $P(2, 7, 3)$ és a $Q(6, 3, 5)$ pontokon átmenő egyenesen rajta van-e az $R(12, -3, 8)$ pont! (ZH, 2006. október 26.)

5. A p valós paraméter milyen értékeire
a) merőleges az $\frac{x-5}{3} = \frac{y-10}{p} = \frac{z+8}{4}$ egyenletrendszerű egyenes a $12x - py + 16z = 5$ egyenletű síkra;

b) metszi az $\frac{x-5}{3} = \frac{y-10}{p} = \frac{z+8}{4}$ egyenletrendszerű egyenes a $12x - cy + 16z = 5$ egyenletű síkot?

6. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben (\mathbb{R}^3 -ben)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból (az \mathbb{R}^3 -beli műveletekkel) az \underline{a} vektor?

b) Az \mathbb{R}^3 tér mely vektorai fejezhetőek ki az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból? (Készíts „tesztet”!)

c) Az \mathbb{R}^3 tér mely vektorai fejezhetőek ki az \underline{u} és \underline{v} vektorokból? (Készíts „tesztet”!)

d) Milyen geometriai alakzatot határoznak meg a c) feladat megoldásai?

7. A $P(1, -2, 5)$ és a $Q(7, 6, 1)$ pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a P és a Q felezőmerőleges síkját). Határozzuk meg ennek a síknak az egyenletét! (ZH, 2003. január)

8. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12; 1; 7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x - 5 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest! (Hasonló: ZH, 2010. december 6.)

9. Mely \mathbb{R}^4 -beli vektorok fejezhetőek ki az

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és a } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok segítségével? (Készíts „tesztet”!)

10. Döntsük el, hogy a $P(1, 4, 4)$ és a $Q(3, 12, -2)$ pontokon átmenő egyenesen metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét! Ha a válasz igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t! (ZH, 2006. november 9.)

11. Tartalmazza-e az $R(4; 1; 5)$ pontot az a sík, amely a $P(1; 4; 2)$ és $Q(3; 3; -1)$ pontokat összekötő egyenest a P -ben merőlegesen metszi?

12.a) Add meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy a $2x + 3y - z = 6$, a $x - 3y + 2z = 5$ és a $4x - 3y + pz = q$ egyenletű síkok egy egyenesre illeszkedjenek!

b) Most úgy válaszold meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk!

c) Az eddigieken kívül milyen helyzetben lehet egymáshoz képest három sík a térben? Ezek közül melyek valósulhatnak meg p és q alkalmas megválasztásával?