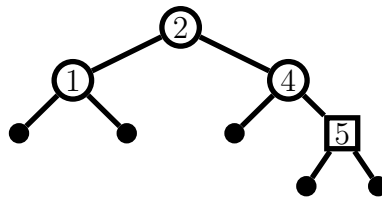


A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.  
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. (a) Rajzolja fel a 3, 8, 4, 12, 10, 6, 21, 33 tömbbel adott kupacot bináris fa alakban. (Itt indoklás nem szükséges.)  
(b) Szűrje be ebbe a kupacba (a fa alakban) az 5-t, majd hajtson végre egy MINTÖR-t, a megoldása során látszódnak az egyes lépései a műveleteknek.

2. Egy bináris keresőfa preorder bejárása során a fa csúcsait 3, 10, 4, 8, 7, 9 sorrendben látogatjuk meg. Rajzolja fel ezt a hat csúcsú bináris keresőfát, ahol ez megtörténhetett, majd lássa be, hogy a fa csak így nézhet ki.

3. Szűrje be a következő piros-fekete fába a 9-et. (A  $\bigcirc$  csúcs fekete, a  $\square$  pedig piros.) A megoldásban látszódnak melyik műveleteket végzi, de indokolni nem kell.



4. Egy kezdetben üres 2-3-fába az  $1, 2, \dots, n$  számokat szűrtük be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a háromgyerekes csúcsok száma  $O(\log n)$ .

5. Lássa be, hogy az alábbi eldöntési probléma coNP-ben van:

**Input:**  $G$  egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf

**Kérdés:** Igaz-e, hogy  $G$  minden feszítőfájában van olyan csúcs, aminek a feszítőfában négy szomszédja van (azaz a csúcs a fában negyedfokú)?

6. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi NP-beli eldöntési feladat? (Azt a tényt fel szabad használni, hogy ez a feladat NP-ben van.)

**Input:**  $G$  irányítatlan gráf szomszédossági mátrixával és  $k$  pozitív egész szám

**Kérdés:** Igaz-e, hogy  $G$ -ben van  $k$  méretű klikk és  $k$  elemű független ponthalmaz is?

7. Ha adott  $n$  szám, akkor hívjuk közülük középső elemnek a rendezés szerinti  $\lceil n/2 \rceil$ -ediket. Kezdetben adottak az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  egész számok, amikről tudjuk, hogy az  $a_1$  a középső elem, egyébként a számok rendezetlenek. Ezekből építsen fel egy adatszerkezetet  $O(n)$  összehasonlítást felhasználva úgy, hogy a felépített adatszerkezetben az alábbi két műveletet  $k$  tárolt elem esetén  $O(\log k)$  lépésben meg lehessen valósítani:

BESZŰR: egy új elemet illeszt az adatszerkezetbe,

KÖZÉPTÖR: az aktuális középső elemet törli.