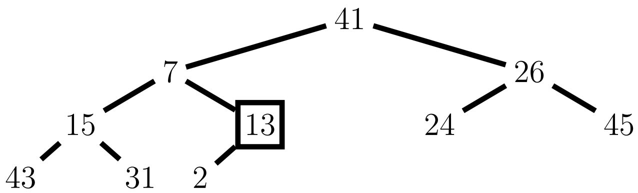
Algoritmuselmélet - 2. pótZH
2024 tavasza

A munkaidő 90 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.
Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

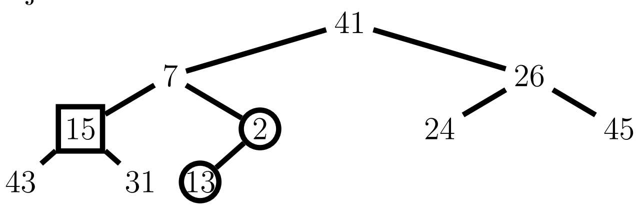
1. Egy (majdnem) teljes bináris fa tömb reprezentációja $41, 7, 26, 15, 13, 24, 45, 43, 31, 2$. Ábrázolja ennek fa alakját és hajtsa végre az órán tanult kupacépítés algoritmust rajta. *(Minden lépés után adja meg az aktuális állapotot, de indokolni nem kell.)*

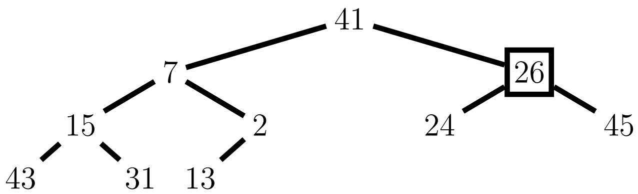
Megoldás:

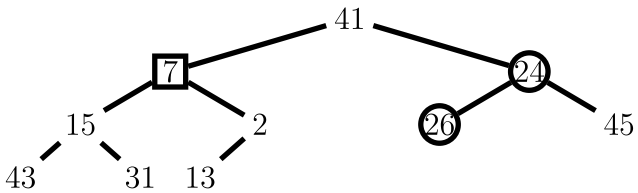
Jó fa. **2 pont**

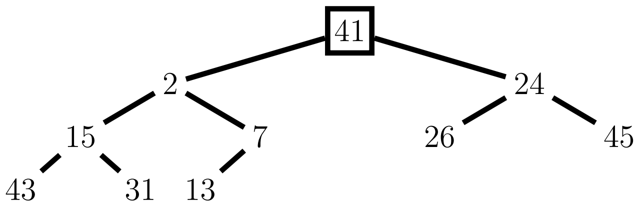


Jó helyről indul a kupacol eljárás. **1 pont**

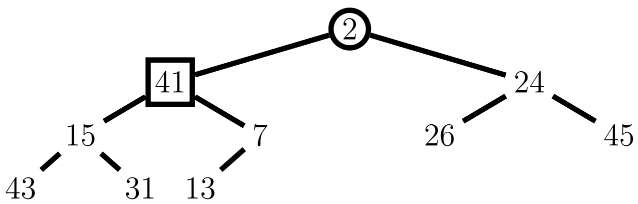




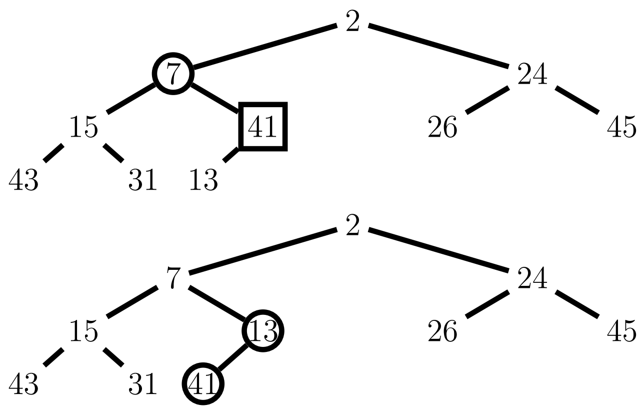




Jó lépések eddig. **3 pont**

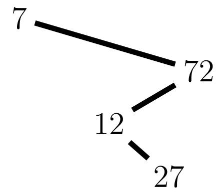


A 41-nek le kell szivárogni. **2 pont**

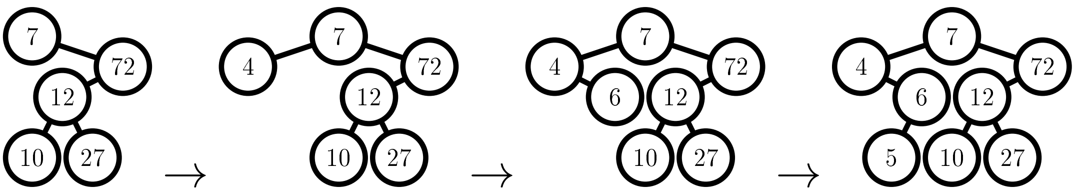


Jó cserék, mindig a kisebb kerül feljebb. **2 pont**

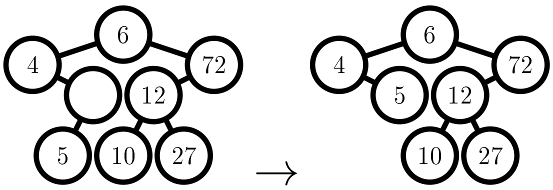
2. Az alábbi bináris keresőfába
   (a) Szúrja be sorban a $10, 4, 6, 5$ számokat az órán tanult módszerrel.
   (b) Ezután törölje ki a 7-et, majd pedig a 72-t az órán tanult módszerrel..
   Minden lépés után adja meg az aktuális állapotot, de indokolni nem kell.



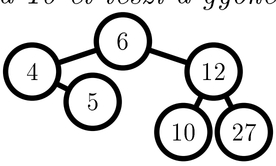
Megoldás:

$10, 4, 6, 5$: $\longrightarrow$ 

Jó faépítés. **5 pont**

Töröl(7): $\longrightarrow$ 

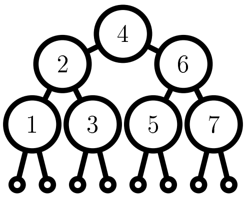
A 7 jó törlése. **3 pont**
Ha a 6 helyett a 10-et teszi a gyökérbe, akkor ***-1 pont***

Töröl(72): $\longrightarrow$ 

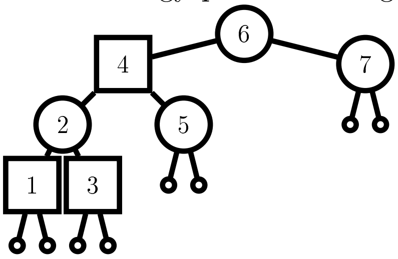
A 72 jó törlése. **2 pont**

3. Mekkora lehet egy olyan piros-fekete fa magassága, amiben 7 elemet tárolunk? Adja meg az összes lehetséges értéket.

Megoldás: A magasság a gyökértől a levélig vezető úton az élek száma.
Nem kell levonni, ha más magasság definícióval számol.
A magasság legalább 3, hiszen 2 magasságú fában nem fér el, csak 3 elem. **2 pont**
3 lehet is. **1 pont**



4 is lehet. **1 pont**
Indoklás vagy példa a 4 magasságúra. **2 pont**



4-nél több nem lehet, mert akkor a leghosszabb ágon legalább 5 él kellene legyen, emiatt pedig (mivel a levél és a gyökér is fekete, legfeljebb 2 piros csúcs lehet rajta (2. és 4. vagy 2. és 5. vagy 3. és 5.), tehát kell legyen legalább 3+1 (3 belső csúcs, plusz 1 levél) fekete csúcs. Azaz, mivel a fekete-magasság minden irányba ugyanannyi, bármely ágon kell legyen 3+1 fekete csúcs, ez pedig azt jelenti, hogy legalább 7 fekete elem van a fa belsejében. Ez pedig ellentmondás, hiszen akkor nem lehet piros csúcs már, ha 7 elemet tárolunk, hisz mind fekete. Tehát 4-nél több nem lehet a magasság. **4 pont**

4. A kezdetben üres $M = 8$ méretű hashtáblába a $h(x) = 5x \pmod M$ hash-függvény és a $h'(x) = (x \pmod 3)) + 1$ másodlagos hash-függvény segítségével az adott sorrendben szúrja be a $3, 2, 4, 11, 5, 1$ elemeket. Ábrázolja az egyes beszúrások menetét is!

Megoldás: Kettős hashelésnél a próbasorozat: $h_i = -i \cdot h'(K)$. **2 pont**
Ha nem ezzel a próbasorozattal számol, de valami hasonlóval, akkor ***-1 pont***
Ha nem a $h(x) = 5x \pmod M$ *hash függvényt használja.* ***-1 pont***

A $3, 2, 4, 1$ esetén a hash-függvény által adott cella üres, ezek jó beszúrása. **3 pont**
11 esetén a $7, 4, 1$ cellákat próbáljuk, **3 pont**

az 5 esetén pedig az $1, 6$ cellákat. **2 pont**

0	1	2	3	4	5	6	7
	11	2		4			3

0	1	2	3	4	5	6	7
	11	2		4	1	5	3

5. Bizonyítsa be, hogy ha egy X eldöntési problémáról be tudnánk látni, hogy $X \in$ NP, de $X \notin$P, akkor MaxFüggetlen $\notin P$ is teljesülne.

Megoldás: Tegyük fel indirekt, hogy MaxFüggetlen $\in P$ **1 pont**
Tudjuk, hogy MaxFüggetlen NP-teljes. **1 pont**
Ha egy NP-teljes P-ben van, akkor P=NP, ez volt előadáson (vagy indoklás). **2 pont**
Ezért, ha MaxFüggetlen P-ben van, akkor ebből következik, hogy P=NP. **4 pont**

Innen ellentmondás, mert így $X \in$P is teljesülne. **2 pont**

6. Egy céges vacsorán a részvevők között vannak olyanok, akik nem kedvelnek néhány másik résztvevőt. A „nem kedvelés” kölcsönös. Adottak az egymást nem kedvelő párok.

   P-ben van vagy NP-teljes az alábbi NP-beli eldöntési feladat? *(Azt a tényt fel szabad használni, hogy ez a feladat NP-ben van.)*

   Input: Az egymást nem kedvelő párok listája.

   Kérdés: Le lehet-e ültetni a résztvevőket 2 egyforma méretű kör alakú asztal köré úgy, hogy ne üljön egymás mellett két olyan résztvevő, aki nem kedveli egymást?

   Megoldás: Nevezzük a fenti problémát Asztal problémának.
   Ha az Asztal probléma NP-beli és visszavezethető rá egy NP-teljes probléma, akkor Asztal is NP-teljes. Az Iszonyú Hasznos Tétel miatt ez már bizonyítja az NP-teljességet. Az NP-beliséget nem kell most bizonyítani a feladat szerint. *(Ha ezek nincsenek így leírva, de aztán ennek megfelelően folytatódik a bizonyítás, akkor is jár ez a pont.)* **1 pont**
   Megadunk egy H $\prec$ Asztal Karp-redukciót. **1 pont**
   A redukció során egy G gráfhoz először azt a G' gráfot rendeljük, amiben G'-t úgy kapjuk G-ből, hogy a G gráfból, veszünk két diszjunkt példányt, majd az így kapott gráfnak vesszük a komplementerét. Ezután G' élei legyenek az egymást nem kedvelő párok listája. **2 pont**
   Ennek előállítása gyors, mert a másik G hozzávétele $O(n)$-ben megvan és az éllista is gyorsan előállítható (akár mátrixszal, akár éllistával van adva G). **1 pont**
   Ha G-ben van Hamilton-kör, akkor $\overline{G}$ pontjainak van egy felsorolása, amiben a szomszédosak között sehol nincs él. Ebből kapunk megfelelő ültetést mindkét asztalhoz. **2 pont**
   Ha G'-ben van megfelelő ültetés, akkor ez $\overline{G'}$-ben két olyan kört ad, amik G két példányában egy-egy Hamilton-kört ad, tehát G-ben van Hamilton-kör. **3 pont**
   Ha nem áll össze a bizonyítás, de lefordítja a feladatot gráfelméleti nyelvre, megjelenik a H *probléma, ennek NP-teljessége és valamiféle kapcsolat, akkor lehet adni max* ***4 pont***

7. Írja fel a Hátizsák feladat optimalizációs változatát egészértékű programozási feladatként.

   Megoldás: Legyen a Hátizsák inputja: $s_1, \ldots, s_m; v_1, \ldots, v_m; b$ **1 pont**
   Maximalizálni akarjuk a bepakolt tárgyak összértékét. **1 pont**
   Az x_i változó legyen 1, ha az i-edik tárgyat bepakoltuk, és 0 különben. **2 pont**
   Az egyenlőtlenségek: $\sum_{i=1}^{m} s_i x_i \leq b$ **3 pont**
   Minden $0 \leq x_i \leq 1$ és x_i egész. **1 pont**
   Célfüggvény: $\max \sum_{i=1}^{m} v_i x_i$ **2 pont**