Algoritmuselmélet

NP-teljes problémák

Katona Gyula Y. / Vizer Máté

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Emlékeztető

Definíció

Egy X eldöntési problémához tartozó L_X nyelv azoknak a bemeneteknek a halmaza, amelyekre a válasz IGEN. *A lehetséges bemeneteket (amelyek tehát vagy beletartoznak L_X-be vagy nem),* szavaknak *hívjuk.*

Egy X eldöntési probléma és x bemenet esetén

- $x \in X$ *jelöli, hogy az x bemenetre a válasz* IGEN,
- $x \notin X$ *jelöli, hogy az x bemenetre a válasz* NEM.

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X megoldása visszavezethető az Y probléma megoldására.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

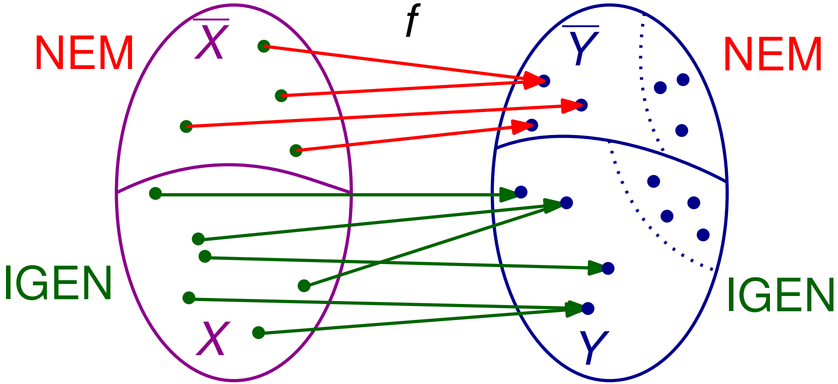
Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$? $\Longrightarrow$ tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e. $\surd$

Ha tudnánk, hogy X nehéz, és tudjuk, hogy $X \prec Y$

$\Longrightarrow$ Y is nehéz lenne.

Ha Y könnyű, és X nem lényegesen nehezebb nála, akkor X is könnyű.

Karp-redukció



3SZÍN és 4SZÍN

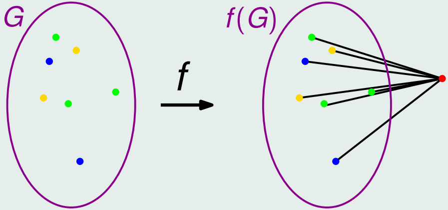
3SZÍN — **Bemenet:** G gráf.
Kérdés: Igaz-e, hogy G színezhető 3 színnel?

4SZÍN — **Bemenet:** G gráf.
Kérdés: Igaz-e, hogy G színezhető 4 színnel?

Állítás

3SZÍN $\prec$ 4SZÍN.

Bizonyítás.



- f polinom időben számolható ✓
- G 3 színnel színezhető $\Leftrightarrow$ $f(G)$ 4 színnel színezhető ✓

□

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{coNP}$.
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.
6. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \prec Z$, *akkor* $X \prec Z$.

Bizonyítás.

Legyen f *az* X *Karp-redukciója* Y*-re, ahol* f $c_1 n^k$ *időben számolható.* x *egy bemenet, melyről szeretnénk eldönteni, hogy* $x \in X$ *teljesül-e,* n *az* x *hossza.*

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et $\rightarrow$ időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^\ell$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e.
$\rightarrow$ időigénye $\leq c_2(c_1 n^k)^\ell$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ összidő $O(n^{k\ell})$ $\surd$

2.: Az $f(x) \in Y$ tény egy t tanúja jó $x \in X$ tanújának is, és az Y-hoz tartozó $\mathcal{T}$ tanúsító algoritmus egy kis módosítással jó lesz az X tanúsító algoritmusának is.
$\mathcal{T}'$ az (x, t) bemenetre először kiszámítja $f(x)$-et, majd az $(f(x), t)$ párra alkalmazza $\mathcal{T}$-t.
Ha az eredmény IGEN, akkor legyen $\mathcal{T}'$ eredménye is IGEN, különben pedig NEM.
$|t| = O(|f(x)|^c) \implies |t| = O(n^{kc})$
$\mathcal{T}'$ lépésszáma, ha $\mathcal{T}$ lépésszáma $O((|y| + |t|)^\ell)$:
$O(n^k) + O((|f(x)| + |t|)^\ell) = O(n^k) + O(|f(x)|^{c\ell}) = O(n^{kc\ell})$.

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$

4.: $\Longleftarrow$ 2.,3.

5.: $\Longleftarrow$ 2.,4.

6.: Legyen f az $X \prec Y$ függvénye, ami $O(n^k)$ időben számolható és g az $Y \prec Z$ függvénye, ami $O(n^\ell)$ időben számolható.
Az $X \prec Z$ függvénye $g(f(x))$ lesz, ami $O((n^k)^\ell) = O(n^{k\ell})$ időben számolható. $\square$

NP-teljes problémák

Definíció

Az X eldöntési probléma NP-nehéz, ha tetszőleges (azaz minden) $X' \in \mathrm{NP}$ probléma esetén létezik $X' \prec X$ Karp-redukció.
Az X eldöntési probléma NP-teljes, ha $X \in \mathrm{NP}$ és X NP-nehéz.

Egy NP-teljes probléma tehát legalább olyan nehéz, mint bármely más NP-beli probléma.
Ha egy ilyen problémáról kiderülne, hogy P-beli (coNP-beli), akkor ugyanez igaz lenne minden NP-beli problémára.

Van-e NP-teljes probléma?

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *függvényeket* n*-változós* Boole-függvényeknek *vagy* Boole-formuláknak *hívjuk.*

Tétel

Minden Boole-függvény felírható az $x_1, \ldots, x_n$ *Boole-változók, az* $\wedge, \vee, \neg$ *logikai műveletek és zárójelek segítségével.*

Pl. Boole-formula:

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge ((\neg x_3 \vee x_2 \vee (x_6 \wedge x_1)) \wedge \neg(x_5 \vee x_6))$$

Boole-formulák

Definíció

Egy Boole-formula kielégíthető, ha lehet úgy értékeket adni a változóinak, hogy a függvény értéke 1 legyen.

Pl. $\Phi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ kielégíthető, mert ha $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$, akkor $\Phi(x_1, x_2) = 1$

De pl. $(x_1 \wedge \neg x_1)$ nyilván nem kielégíthető.

Cook–Levin-tétel

Van-e NP-teljes probléma?

Definíció

SAT *probléma:*

Bemenet: Φ *Boole-formula*

Kérdés: Kielégíthető-e Φ*?*

Tétel (S. A. Cook, L. Levin, 1971)

A SAT *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás elég bonyolult.

NP-teljesség

Kérdés

Miért jó tudni, hogy egy probléma NP-teljes?

Ha valaki ad egy polinomiális algoritmust egy NP-teljes problémára, akkor az megoldja a nagy sejtést.

Tétel

Ha X NP-teljes és $X \in \mathrm{P}$, akkor $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Bizonyítás.

X NP-teljes $\implies$ minden $L \in \mathrm{NP}$-re van $L \prec X$ redukció.
Karp-redukció 1. tulajdonság $\implies$ Ha $X \in \mathrm{P}$, akkor $L \in \mathrm{P}$ is teljesül.
Vagyis $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$. Mivel tudjuk azt is, hogy $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ $\implies$ $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$. $\square$

További NP-teljes feladatok

Tétel (Iszonyú Hasznos Tétel - IHT)

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.
Ha $X \prec Y \implies Z \prec X$ teljesül minden $Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
tranzitivitás $\implies Z \prec Y$ teljesül minden $Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
$\implies Y \in \mathrm{NP}$-nehéz.
Mivel $Y \in \mathrm{NP}$ is $\implies Y \in \mathrm{NP}$-teljes. □

Nem kell már minden NP-beli problémát az Y-ra redukálni; elég ezt megtenni egyetlen NP-teljes X problémával.

A 3SZÍN probléma

Tétel

A 3SZÍN probléma NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$*, belátható, hogy* SAT $\prec$ 3SZÍN*.*

Maximális méretű független ponthalmaz gráfokban

MAXFTLEN

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-nek k elemű független csúcshalmaza?

Tétel

A MAXFTLN *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

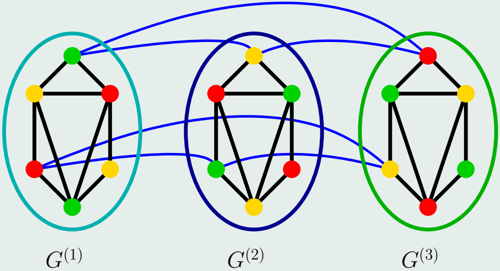
MAXFTLEN $\in \mathrm{NP}$*: tanú egy* k*-elemű* $S \subseteq V(G)$ *független csúcshalmaz.* $\checkmark$

Megadunk egy 3SZÍN $\prec$ MAXFTLEN *Karp-redukciót:* $G \to (G', k')$

$$G \in \text{3SZÍN} \Leftrightarrow (G', k') \in \text{MAXFTLEN}$$

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.



$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ G' is $\Longrightarrow$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$
Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.
$\Longrightarrow$ Minden G-beli x pontnak pontosan 1 példányát tartalmazza S.
$\Longrightarrow$ Az x pont legyen sárga / piros / zöld, ha ez a példány $G^{(1)}$-ben / $G^{(2)}$-ben / $G^{(3)}$-ban van. $\Longrightarrow$ ez jó színezés G-ben. $\surd$ $\square$

Maximális méretű klikk

MAXKLIKK

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-ben k pontú teljes részgráf (k-klikk)?

Tétel

A MAXKLIKK *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

MAXKLIKK $\in$ NP: tanú egy k-elemű $S \subseteq V(G)$ teljes részgráf. $\surd$

Megadunk egy MAXFTLEN $\prec$ MAXKLIKK Karp-redukciót:

$f(G,k) = (\overline{G}, k)$ (független ponthalmaz a komplementerben teljes gráf). $\surd$ $\square$

Hamilton-kör probléma

H Bemenet: G gráf
Kérdés: Van-e G-ben Hamilton-kör?

Tétel

A H probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$. $\surd$
Belátható, hogy SAT $\prec$ H. (bonyolult)

H-ÚT Bemenet: G gráf
Kérdés: Van-e G-ben Hamilton-út?

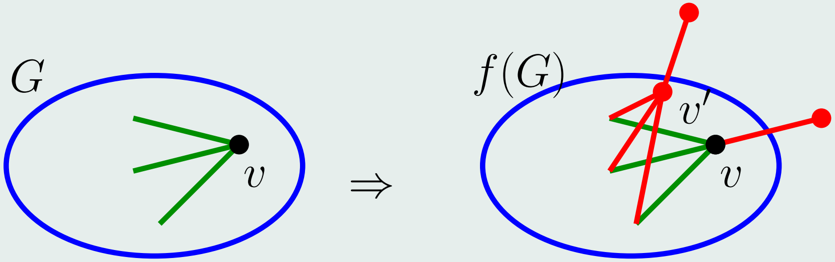
Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in$ NP, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$
Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



G-ben akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha $f(G)$-ben van Hamilton-út. $\square$

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

$\Longrightarrow$

HÁT Bemenet: $s_1, \ldots, s_m$; $v_1 \ldots, v_m$; b; k.

Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$?

Lemma

HÁT $\in \mathrm{NP}$

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k$. $\Longrightarrow$

A Részhalmaz összeg probléma

RH Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

RH $\in$ NP. $\surd$
Belátható, hogy SAT $\prec$ RH.

Speciális eset: Partíció feladat: ahol $b = \frac{1}{2} \sum s_i$.

PARTÍCIÓ

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i$?

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

PARTÍCIÓ $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$ PARTÍCIÓ, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

RH-nak megoldása az $R \subset \{s_1, ..., s_m\}$ számhalmaz$\Leftrightarrow$ a megoldáshoz vegyük hozzá $(s + 1 - b)$-t $\Leftrightarrow$ PARTÍCIÓ-nak megoldása az $R \cup \{s + 1 - b\}$ számhalmaz. $\square$