Mérnökinformatikus BSc, Valószínűségszámítás ZH megoldások
2017. november 6.
A.

1. Legyen $\mathbf{P}(A) = 0,3$ és $\mathbf{P}(B) = 0,6.$
a.) Mennyi $\mathbf{P}(A+\bar{B})$, $\mathbf{P}(\bar{A}B)$, ill. $\mathbf{P}(A|B)$, ha A és B függetlenek?
b.) Mennyi $\mathbf{P}(A+B)$, $\mathbf{P}(AB)$, ill. $\mathbf{P}(A|B)$, ha A és B kizáróak?
Megoldás: a.) $\mathbf{P}(A+\bar{B}) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{B})-\mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{B})-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}) = 0.3+0.4-0.3\cdot 0.4 = 0.58$
$\mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B) = 0.7\cdot 0.6 = 0.42, \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) = 0.3$
b.) $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) = 0.9, \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B) = 0$

2. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a járművek 50%-a személyautó, 35%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15%-ánál, a teherautók 20%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel. Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) a műszaki állapota kifogásolható;
b) ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor az teherautó?
Megoldás: S,T,E: azokat az eseményeket jelöli, hogy a megállított jármű típusa személy, teher, egyéb. K pedig az az esemény, hogy a jármű állapota kifogásolható.
$\mathbf{P}(S) = 0.5, \mathbf{P}(T) = 0.35, \mathbf{P}(E) = 0.15, \mathbf{P}(K \mid S) = 0.15, \mathbf{P}(K \mid T) = 0.2, \mathbf{P}(K \mid E) = 0.35$
a.) A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(K) = \mathbf{P}(K \mid S)\cdot\mathbf{P}(S)+\mathbf{P}(K \mid T)\cdot\mathbf{P}(T)+\mathbf{P}(K \mid E)\cdot\mathbf{P}(E) = 0.15\cdot 0.5+0.2\cdot 0.35+0.35\cdot 0.15 = 0.1975$
b.) A Bayes tételből: $\mathbf{P}(T \mid K) = \frac{\mathbf{P}(K|T)\cdot\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(K)} = \frac{0.2\cdot 0.35}{0.1975} = 0.35443$

3. Egyeneletesen választunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumban, jelölje ezt X. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X; 1-X$ és $1/2$ háromszöget alkot?
Megoldás: A háromszög egyenlőtlenségek most:

$$X \le 1-X+\frac{1}{2} \Leftrightarrow X \le \frac{3}{4}$$

$$1-X \le X+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le X$$

$$\frac{1}{2} \le 1-X+X = 1$$

A háromszög szerkeszthetőségének feltétele tehát

$$\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{4}$$

ami 1/2 valószínűséggel fog teljesülni.

4. Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 100$ (gramm), $\sigma = 2$ (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy öt véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, aminek a súlya 99 és 101 gramm közé fog esni?
Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy zacskó súlya a határok közé esik:
$\mathbf{P}(99 < X < 101) = 2\Phi(\frac{1}{2})-1 = p$
Táblázatból kiolvasható, hogy $\Phi(\frac{1}{2}) = 0.6915$, így $p = 2\cdot 0.6915-1 = 0.383.$
Annak valószínűsége, hogy 5 zacskó egyike sincs ebben az intervallumban
$(1-p)^5 = (1-0.383)^5 = 8.9418\times 10^{-2}$
Ennek ellentett valószínűsége az, hogy legalább egy zacskó súlya a határok közé esik:
$1-8.9418\times 10^{-2} = 0.91058$

5. Négyszer feldobunk egy szabályos érmét. Legyen X a dobott fejek és írások számának négyzetösszege.
a) Adja meg X eloszlását!
b) Adja meg X eloszlásfüggvényét!
c) Számolja ki X várható értékét és szórását!
Megoldás: a.) A lehetséges fej-írás eloszlások:

fej/írás	X
0/4	16
1/3	10
2/2	8
3/1	10
4/0	16

Tehát $R_X = \{8, 10, 16\}, \mathbf{P}(X = 8) = \mathbf{P}\big(\text{2 fej, 2 írás}\big) = \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$
$\mathbf{P}(X = 10) = \mathbf{P}\big(\text{1 fej, 3 írás vagy 3 fej, 1 írás}\big) = 2 \cdot \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
$\mathbf{P}(X = 16) = \mathbf{P}\big(\text{4 fej vagy 4 írás}\big) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$
b.)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le 8 \\ \frac{3}{8} & \text{, ha } 8 < x \le 10 \\ \frac{7}{8} & \text{, ha } 10 < x \le 16 \\ 1 & \text{, ha } x > 16 \end{cases}$$

c.) $\mathbf{E}X = 8 \cdot \frac{3}{8} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8} = 10, \mathbf{E}X^2 = 64 \cdot \frac{3}{8} + 100 \cdot \frac{1}{2} + 256 \cdot \frac{1}{8} = 106, \boldsymbol{\sigma}^2 X = 106 - 100 = 6$
$\sigma X = \sqrt{6}$

6[IMSC]. Számítsuk ki az $Y = \frac{1}{1+X}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:
a.) $X \in B(5, \frac{1}{4})$ b.) $X \in Po(1)$.
Megoldás: a.)
$\mathbf{E}Y = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{1+i} \cdot \binom{5}{i} \cdot \frac{3^{5-i}}{4^5} = \frac{1}{4^5} \cdot [3^5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3^4 + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3^3 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 3^2 + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{6}] = \frac{3367}{6 \cdot 4^5} = \frac{3367}{6144} = 0.548$
b.) $\mathbf{E}Y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+i} \cdot \frac{e^{-1}}{i!} = e^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = e^{-1} \cdot (e - 1) = 0.632\,12$

Mérnökinformatikus BSc, Valószínűségszámítás ZH megoldások
2017. november 6.
B.

1. Legyen $\mathbf{P}(A) = 0{,}2$ és $\mathbf{P}(B) = 0{,}5$.
a.) Mennyi $\mathbf{P}(A + \bar{B})$, $\mathbf{P}(\bar{A}B)$, ill. $\mathbf{P}(A|B)$, ha A és B egymást kizáró események?
b.) Mennyi $\mathbf{P}(A + B)$, $\mathbf{P}(AB)$, ill. $\mathbf{P}(A|\overline{B})$, ha A és B független események?
Megoldás: a.) $\mathbf{P}(A + \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{B}) = 0.5, \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B) = 0.5, \mathbf{P}(A|B) = 0$
b.) $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.2 + 0.5 - 0.2 \cdot 0.5 = 0.6$
$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.1, \mathbf{P}(A|\overline{B}) = \mathbf{P}(A) = 0.2$

2. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a járművek 75%-a személyautó, 15%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 10%-ánál, a teherautók 15%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 20%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel. Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) a műszaki állapota kifogásolható;
b) ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor az személyautó?
Megoldás: S, T, E: azokat az eseményeket jelöli, hogy a megállított jármű típusa személy, teher, egyéb. K pedig az az esemény, hogy a jármű állapota kifogásolható.
$\mathbf{P}(S) = 0.75, \mathbf{P}(T) = 0.15, \mathbf{P}(E) = 0.1, \mathbf{P}(K \mid S) = 0.1, \mathbf{P}(K \mid T) = 0.15, \mathbf{P}(K \mid E) = 0.2$
a.) A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(K) = \mathbf{P}(K \mid S) \cdot \mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(K \mid T) \cdot \mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(K \mid E) \cdot \mathbf{P}(E) = 0.1 \cdot 0.75 + 0.15 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.1175$
b.) A Bayes tételből: $\mathbf{P}(S \mid K) = \frac{\mathbf{P}(S \mid T) \cdot \mathbf{P}(S)}{\mathbf{P}(K)} = \frac{0.1 \cdot 0.75}{0.1175} = 0.63830$

3. Egyeneletesen választunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumban, jelölje ezt X. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X; 1 - X$ és $1/3$ háromszöget alkot?
Megoldás: A háromszög egyenlőtlenségek most:

$$X \leq 1 - X + \frac{1}{3} \Leftrightarrow X \leq \frac{2}{3}$$

$$1 - X \leq X + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq X$$

$$\frac{1}{3} \leq 1 - X + X = 1$$

A háromszög szerkeszthetőségének feltétele tehát

$$\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}$$

ami 1/3 valószínűséggel fog teljesülni.

4. Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 250$ (gramm), $\sigma = 3$ (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább kettő olyan van, aminek a súlya 245 és 255 gramm közé fog esni?
Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy zacskó súlya a határok közé esik:
$\mathbf{P}(245 < X < 255) = 2\Phi(\frac{5}{3}) - 1 = p$
Táblázatból kiolvasható, hogy $\Phi(\frac{5}{3}) \approx \Phi(1.67) = 0.9525$, így $p = 2 \cdot 0.9525 - 1 = 0.905$
Annak valószínűsége, hogy 3 zacskó között legalább kettő a súlyhatárok között van:
$p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$, azaz $0.905^3 + 3 \cdot 0.905^2 \cdot (1 - 0.905) = 0.97464$

5. Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Legyen X a dobott fejek és írások számának négyzetösszege.
a) Adja meg X eloszlását!
b) Adja meg X eloszlásfüggvényét!
c) Számolja ki X várható értékét és szórását!
Megoldás: a.) A lehetséges fej-írás eloszlások:

fej/írás	X
0/3	9
1/2	5
2/1	5
3/0	9

Tehát $R_X = \{5,9\}, \mathbf{P}(X=5) = \mathbf{P}\Big($1 fej, 2 írás vagy 2 fej, 1 írás$\Big) = 2\cdot\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$
$\mathbf{P}(X=9) = \mathbf{P}\Big($3 írás vagy 3 fej$\Big) = 2\cdot\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
b.)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le 5 \\ \frac{3}{4} & \text{, ha } 5 < x \le 9 \\ 1 & \text{, ha } x > 9 \end{cases}$$

c.) $\mathbf{E}X = 5\cdot\frac{3}{4} + 9\cdot\frac{1}{4} = 6, \mathbf{E}X^2 = 25\cdot\frac{3}{4} + 81\cdot\frac{1}{4} = 39, \boldsymbol{\sigma}^2X = 39 - 36 = 3$
$\sigma X = \sqrt{3}$

6[IMSC]. Számítsuk ki az $Y = \frac{1}{1+X}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:
a.) $X \in B(4,\frac{1}{3})$ b.) $X \in Po(2)$.
Megoldás: a.)
$\mathbf{E}Y = \sum_{i=0}^{4}\frac{1}{1+i}\cdot\binom{4}{i}\cdot\frac{2^{4-i}}{3^4} = \frac{1}{3^4}\cdot[2^4 + \frac{1}{2}\cdot4\cdot2^3 + \frac{1}{3}\cdot6\cdot2^2 + \frac{1}{4}\cdot4\cdot2 + \frac{1}{5}\cdot5] = \frac{16+16+8+2+1}{81} = \frac{43}{81} = 0.53086$
b.) $\mathbf{E}Y = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1+i}\cdot\frac{2^i}{i!}\cdot e^{-2} = \frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot(e^2-1) = 0.43233$