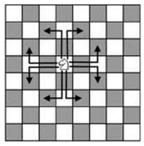
**1.** Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\sigma^2(X) = 5$, számoljuk ki
(a) $\mathbf{E}(2+X)^2$-t és
(b) $\sigma^2(4+3X)$-t.
*Megoldás*: (a) $\mathbf{E}(2+X)^2 = 4 + 4\mathbf{E}X + \mathbf{E}X^2, \mathbf{E}X^2 = \sigma^2(X) + (\mathbf{E}(X))^2 = 5+1 = 6$
$\mathbf{E}(2+X)^2 = 4+4+6 = 14$
(b) $\sigma^2(4+3X) = 9\sigma^2(X) = 45$

**2.** Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Jelölje $X$ valószínűségi változó a lehetséges (legális) lépéseinek számát! Adja meg $X$ eloszlását, várható értékét és szórását!



*Megoldás*:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 3 |
| 4 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 |
| 4 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 |
| 4 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 |
| 4 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 4 |
| 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |

$$\mathbf{E}X = \frac{4}{64}\cdot 2 + \frac{8}{64}\cdot 3 + \frac{20}{64}\cdot 4 + \frac{16}{64}\cdot 6 + \frac{16}{64}\cdot 8 = \frac{21}{4} = 5.25$$
$$\mathbf{E}X^2 = \frac{4}{64}\cdot 4 + \frac{8}{64}\cdot 9 + \frac{20}{64}\cdot 16 + \frac{16}{64}\cdot 36 + \frac{16}{64}\cdot 64 = \frac{251}{8}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{251}{8} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 = \frac{61}{16} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} X = \sqrt{\frac{61}{16}} = 1.9526$$

**3.** Legyen $X$ egyenletes eloszlású az egységintervallumon, $Y$ pedig exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ várható értékkel. $X$ és $Y$ függetlenek, $Z = \max\{X, Y\}$. Számoljuk ki a $\mathbf{P}(Z < \frac{1}{3})$ valószínűséget.
*Megoldás*: $F_X(t) = t, t \in (0,1), F_Y(t) = 1 - e^{-2t}, t > 0.$
A függetlenség miatt $Z$ eloszlásfüggvénye az $X$ és $Y$ eloszlásfüggvényeinek szorzata lesz:
$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}(X < t, Y < t) = F_X(t)\cdot F_Y(t)$$
$$F_Z\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{1}{3}\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot F_Y\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\mathbf{P}\left(Z < \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right) = 0.16219$$

**4.** Az $X$ és $Y$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{, ha } 0 < y < 1, 0 < x < y \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$
Független-e $X$ és $Y$?
*Megoldás*:
$$f_1(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x), x \in (0,1)$$
$$f_2(y) = \int_0^y 2dx = 2y, y \in (0,1)$$
Mivel a függetlenségi feltétel nem teljesül, így a komponensek nem függetlenek.

**5.** Egy dobókockát *kétszer* feldobunk. Legyen $X$ a dobások összege, és $Y$ az első dobás mínusz a második dobás. Adja meg az együttes eloszlást. Függetlenek-e $X$ és $Y$?

*Megoldás*:

| $X \backslash Y$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $X$ perem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{36}$ |
| 5 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | $\frac{4}{36}$ |
| 6 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{5}{36}$ |
| 7 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{6}{36}$ |
| 8 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{5}{36}$ |
| 9 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | $\frac{4}{36}$ |
| 10 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{36}$ |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |
| $Y$ perem | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

$$\mathbf{E}XY = 0, \mathbf{E}X = 2 \cdot 3.5 = 7, \mathbf{E}Y = 0 \Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0$$

Korrelálatlanok, de nem függetlenek, mert pl. $0 = \mathbf{P}(X = 2, Y = -5) \neq \mathbf{P}(X = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = -5) = \frac{1}{36^2}$

**6**$^{IMSC}$. Legyenek $X$, $Y$ és $Z$ független, azonos $G(p)$ (geometriai) eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(X = Y), \mathbf{P}(X \geq 2Y), \mathbf{P}(X + Y \leq Z).$$

*Megoldás*:

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^{i-1} \cdot p^2 = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

$$\mathbf{P}(X \geq 2Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2i}^{\infty} \mathbf{P}(X = j) \cdot \mathbf{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2i}^{\infty} (1-p)^{i+j-2} \cdot p^2$$

$$p^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-2} \cdot \sum_{j=2i}^{\infty} (1-p)^j = p^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{3i-2}$$

$$p \cdot \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \left( \frac{1}{1-(1-p)^3} - 1 \right) = \frac{1-p}{p^2 - 3p + 3}$$

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = (k-1) \cdot q^{k-2} \cdot p^2$$

$$\mathbf{P}(X + Y \leq Z) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} (k-1) \cdot q^{k-2} \cdot p^2 \cdot q^{i-1} \cdot p =$$

$$= p^3 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot q^{k-2} \sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1} =$$

$$= p^3 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot q^{k-2} \cdot q^{k-1} \cdot \frac{1}{p} =$$

$$= p^2 q \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(q^2)^{k-2} = p^2 q \frac{1}{(1-q^2)^2} =$$

$$= \frac{q}{(1+q)^2} = \frac{1-p}{(2-p)^2} = \frac{1-p}{4-4p+p^2}$$