Mérnök informatikus BSc, Valószínűségszámítás 1. ZH
2016. október 19.
MEGOLDÁS

1. Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

Megoldás: Geometriai eloszlásról van szó. A sikervalószínűség: $p = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{18}{35}$.

$$\mathbf{P}(X = n) = \left(\frac{17}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{18}{35}$$

2. Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.038 kg szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mennyi a valószínűsége, hogy két függetlenül, véletlenül kiválasztott zacskó közül legalább az egyik első osztályú?

Megoldás:

$p = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(0.95 < X < 1.05) = \Phi(\frac{0.05}{0.038}) - \Phi(\frac{-0.05}{0.038}) = 2\Phi(1.3158) - 1 = 2 \cdot 0.9066 - 1 = 0.8132$

$\mathbf{P}(A_1 + A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = 2p - p^2 = 2 \cdot 0.8132 - 0.8132^2 = 0.96511$

3. Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. 5-ször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húzunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

Megoldás: A feltételes valószínűség az alábbi gondolatmenettelhatározható meg: A "feltéve, hogy fehé-ret és zöldet is húzunk legalább kétszer" esemény bekövetkezési lehetőségeinek száma a kérdéses valószínűség kiszámításához szük-séges összes esetek számát adja, ami a 50. A kedvező esetek száma a piros golyót nem tartalmazó sorrendek száma, ami 20. Ezeket felhasználva a keresett valószínűség: 2/5.

4. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 12-szer dobva, minden szám legalább egyszer kijött?

Megoldás: Jelölje $A_i = \{\text{nem dobtunk } i\text{-t}\}$,

$\mathbf{P}(A_i) = (\frac{5}{6})^{12}, \mathbf{P}(A_i \cdot A_j) = (\frac{4}{6})^{12}, \ldots, \mathbf{P}(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3} \cdot A_{i_4} \cdot A_{i_5}) = \frac{1}{6^{12}}, \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6) = 0.$

A Poincare-formulát alkalmazva:

$$\mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_5 \cdot \bar{A}_6) = 1 - \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{6} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i-1} \cdot \binom{6}{i} \cdot \left(\frac{6-i}{6}\right)^{12} =$$

$$= 1 - 6 \cdot (\tfrac{5}{6})^{12} + 15 \cdot (\tfrac{2}{3})^{12} - 20 \cdot (\tfrac{1}{2})^{12} + 15 \cdot (\tfrac{1}{3})^{12} - 6 \cdot (\tfrac{1}{6})^{12} =$$

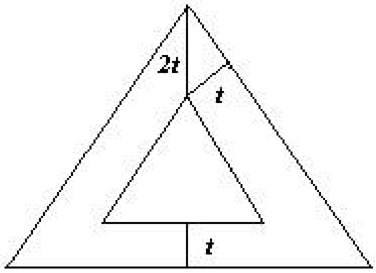
$$= 1 - 0.67294 + 0.11561 - 0.0048828 + 0.000028225 - 0.0000000027564 =$$

$$= \frac{1654565}{3779136} = 0.43782$$

5. Választunk két számot egymástól függetlenül az egyenletes eloszlás szerint a [0,1] intervallumról. Mennyi a valószínűsége annak, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint bármely végponthoz?

Megoldás: Jelölje x az elsőre, y a másodszorra választott számot. Ha $x \leq y$, akkor egymástól való távolságuk $y - x$, a végpontoktól való távolságuk x illetve $1 - y$. Ha x és y közelebb vannak egymáshoz, mint a végpontokhoz, akkor teljesülnek az $y - x < x$ és az $y - x < 1 - y$ egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy $x \leq y, y < 2x, y < \frac{1+x}{2}$ Mindhárom egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza az $y = x, y = 2x, y = \frac{1+x}{2}$ egyenesek által határolt háromszög. Ha $y < x$, akkor egymástól való távolságuk $x - y$, a végpontoktól való távolságuk y illetve $1 - x$. Ha közelebb vannak egymáshoz, mint a végpontokhoz, akkor teljesülnek a $x - y < y$ és az $x - y < 1 - x$ egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy $y < x, x < 2y, 2x - 1 < y$. Mindhárom egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza az $y = x, y = 0.5x, y = 2x - 1$ egyenesekkel határolt háromszög. A jó pontok halmaza egy olyan rombusz, aminek az egyik átlója $\sqrt{2}$, a másik átlója $\frac{\sqrt{2}}{3}$. A jó pontok összes területe tehát $\frac{1}{3}$, vagyis a keresett valószínűség éppen $\frac{1}{3}$.

6[IMSC]. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje X e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi *oldalától*. Határozzuk meg a X valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
Megoldás:



A két háromszög magasságvonalainak aránya:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - 2\sqrt{3}\,t$$

A két háromszög területeinek aránya:

$$\left(1 - 2\sqrt{3}\,t\right)^2$$

Így

$$F_X(t) = 1 - \left(1 - 2\sqrt{3}\,t\right)^2, t \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

A sűrűségfüggvény pedig:

$$f_X(t) = 4\sqrt{3} \cdot \left(1 - 2\sqrt{3}\,t\right), t \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$