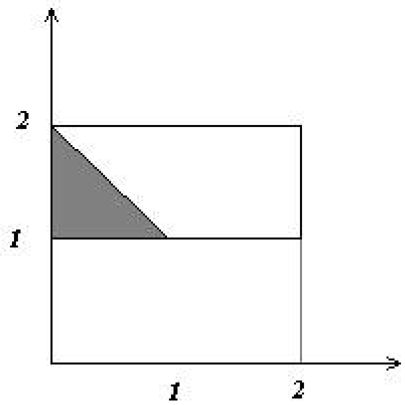
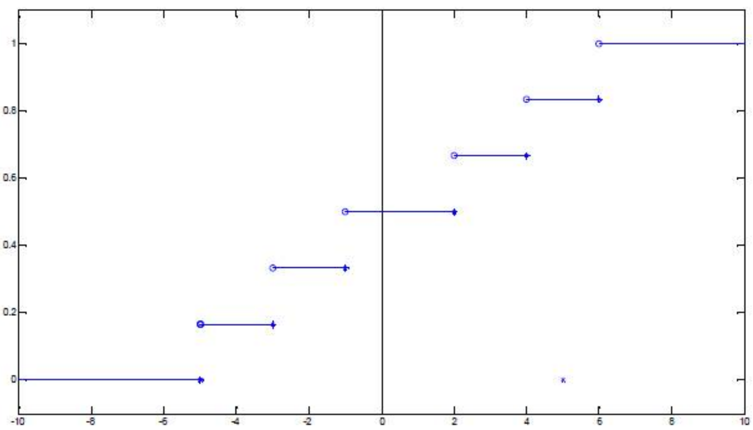
1. Legyen $\mathbf{P}(A \mid B) = 0.7, \mathbf{P}(A \mid \bar{B}) = 0.3$ és $\mathbf{P}(B \mid A) = 0.6$. Határozzuk meg $\mathbf{P}(A)$ értékét!
Megoldás: $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) \cdot 0.7 = \mathbf{P}(A) \cdot 0.6 \Rightarrow \mathbf{P}(A) = \frac{7}{6} \cdot \mathbf{P}(B)$
$\mathbf{P}(A\bar{B}) = (1 - \mathbf{P}(B)) \cdot 0.3 \Rightarrow \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) = 0.3 + 0.4 \cdot \mathbf{P}(B)$
$\mathbf{P}(A) = 0.3 + 0.4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \mathbf{P}(A) \Rightarrow \mathbf{P}(A) = 0.45652$

2. Választunk egy számot 0 és 2 között, és egy másikat 1 és 2 között egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy összegük kisebb, mint 2?
Megoldás: Az eseménytér a $[0,2] \times [1,2]$ téglalap pontjai. A kedvező eseménynek a téglalap azon pontjai felelnek meg, amelyek alatta vannak az $y = 2 - x$ egyenes pontjainak.



A keresett valószínűséget a területek arányából számoljuk: $p = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

3. Egy kockával gurítunk. Ha páros számot gurítunk, akkor annyi pénzt kapunk, amennyit gurítottunk, ha páratlan számot gurítunk, akkor annyi pénzt fizetünk, amennyit gurítunk. Legyen X egy gurítás után a nyereményünk értéke!
a) Adja meg X eloszlását!
b) Rajzolja fel X eloszlásfüggvényét!
c) Számolja ki X várható értékét és szórását!
d) Mennyi a valószínűsége, hogy X értéke éppen a várható értékével egyezik meg?
Megoldás: a.) $R_X = \{-1,-3,-5,2,4,6\}, \mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{6}, i \in R_X$.
b.)



c.) $\mathbf{E}X = \frac{1}{6} \cdot (-1 - 3 - 5 + 2 + 4 + 6) = \frac{1}{2}, \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{6} \cdot (1 + 9 + 25 + 4 + 16 + 36) = \frac{91}{6}$
$\sigma^2 X = \frac{91}{6} - \frac{1}{4} = \frac{179}{12} = 14.917, \sigma X = \sqrt{\frac{179}{12}} = 3.8622$
d.) $\mathbf{P}(X = \frac{1}{2}) = 0$

4. Egy izzó a minden egyes bekapcsoláskor 0.005 valószínűséggel kiég. Legyen az X véletlen változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Számoljuk ki a várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége, hogy X a várható értékénél nagyobb?
Megoldás: $X \in G(0.005) \Rightarrow \mathbf{E}X = \frac{1}{0.005} = 200, \sigma X = \frac{\sqrt{0.995}}{0.005} = 199.50$
$$\mathbf{P}(X > 200) = 1 - \sum_{i=1}^{200} (0.995)^{i-1} \cdot 0.005 = (1 - 0.005)^{200} = 0.36696$$

5. Egy üzemben két gép állít elő egy bizonyos típusú alkatrészt, amelyek élettartama exponenciális eloszlásúnak tekinthető az első gépnél 1000, a másodiknál 1200 óra várható értékkel. Az első gép a termelés 40 %-át adja.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy ha az egy helyen gyűjtött alkatrészek közül kiveszünk egyet, az tovább fog működni, mint 1300 óra?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy ha az egy helyen gyűjtött alkatrészek közül kiveszünk négyet, akkor legalább kettő tovább fog működni, mint 1300 óra?
c.) Ha egy ilyen alkatrész tovább működött, mint 1300 óra, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a második gép gyártotta? Mielőtt kiszámítanánk, becsüljük meg, az eredmény több lesz, vagy kevesebb, mint a feltétel nélküli 0,6 valószínűség?
Megoldás: a.) Mivel könnyen meg tudjuk mondani azokat a feltételes valószínűségeket, hogy milyen valószínűséggel működik az alkatrész 1300 óránál többet, ha az első, ill. a második gyártotta, a teljes valószínűség tételével próbálkozunk. Jelölje X a kivett alkatrész élettartamát, akkor

$$\mathbf{P}(X > 1300) = \mathbf{P}(X > 1300|\text{első gép}) \cdot \mathbf{P}(\text{első gép}) + \mathbf{P}(X > 1300|\text{második gép}) \cdot \mathbf{P}(\text{második gép}).$$

Exponenciális eloszlású valószínűségi változó paramétere a várható érték reciproka.

$$\mathbf{P}(X > 1300|\text{első gép}) = 1 - F_1(1300) = 1 - (1 - e^{-\frac{1300}{1000}}) = e^{-1,3} = 0,2725$$

$$\mathbf{P}(X > 1300|\text{második gép}) = 1 - F_2(1300) = 1 - (1 - e^{-\frac{1300}{1200}}) = e^{-1,0833} = 0,3385$$

$$\mathbf{P}(X > 1300) = 0,2725 \cdot 0,4 + 0,3385 \cdot 0,6 = 0,3121$$

b.) A "‘legalább kettő tovább működik"’ azt jelenti, hogy kettő, három, vagy négy tovább működik, a többi nem. Ezek egymást kizáró események. Feltehetjük, hogy az alkatrészek élettartama egymástól független, így felhasználva az előző pont eredményét

$$\mathbf{P}(\text{legalább kettő tovább működik}) = \sum_{i=2}^{4} \binom{4}{i} \cdot 0.3121^i \cdot 0.6879^{4-i} = 0.36970$$

c.) Mivel az élettartam több, mint bármelyik gépen gyártott alkatrész átlaga, nagy valószínűséggel a jobbakat gyártó gép gyártotta, tehát a második. A valószínűségnek a feltétel nélküli 0,6-nál nagyobbnak kell lennie. A kérdés:

$$\mathbf{P}(\text{második gyártotta}|X > 1300)$$

Ha felhasználjuk az a.) eredményét, akkor ez egy egyszerű feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(\text{második gyártotta}|X > 1300) = \frac{\mathbf{P}(X > 1300 \text{ és második gép})}{\mathbf{P}(X > 1300)}$$

$$\frac{\mathbf{P}(X > 1300 \quad | \text{ második gép}) \cdot \mathbf{P}(\text{második gép})}{\mathbf{P}(X > 1300)} = \frac{0.3385 \cdot 0.6}{0.3121} = 0.65075$$

6. IMSC Négyszer elgurítunk egy szabályos kockát. Legyen X a különböző gurítások száma (azaz az a szám, ahányféle számot gurítunk).
a.) Adja meg X eloszlását!
b.) Számolja ki X várható értékét és szórását!
Megoldás: a.) $R_X = \{1, 2, 3, 4\}, \mathbf{P}(X = 1) = \frac{6}{6^4}, \mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot (8 + \binom{4}{2})}{6^4} = \frac{35}{216},$
$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{6^4} = \frac{5}{9}, \mathbf{P}(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot 4!}{6^4} = \frac{5}{18}$

b.) $\mathbf{E}X = \frac{1}{216} + \frac{70}{216} + \frac{15}{9} + \frac{20}{18} = \frac{671}{216} = 3.1065, \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{216} + \frac{140}{216} + \frac{45}{9} + \frac{80}{18} = \frac{727}{72}$
$\sigma^2 X = \frac{727}{72} - (\frac{671}{216})^2 = \frac{20855}{46656} = 0.44700, \sigma X = \sqrt{\frac{20855}{46656}} = 0.66858$