PZH2 megoldások

1. Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X-Y)^2]$ értékét.
Megoldás:

$$\mathbf{E}[(X-Y)^2] = \mathbf{E}[X^2-2XY+Y^2] = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y + \mathbf{E}Y^2 = 2\mathbf{E}X^2 - 2(\mathbf{E}X)^2 = 2\boldsymbol{\sigma}^2X = 2\sigma^2$$

2. Egy hibátlan érmével dobunk négyszer. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z = XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.
Megoldás: Első megoldás:
$X, Y \in B(4, \frac{1}{2}), Y = 4 - X \Rightarrow Z = 4X - X^2 \Rightarrow \mathbf{E}Z = 4\mathbf{E}X - \mathbf{E}X^2$
$\mathbf{E}Z = 4\cdot 4\cdot\frac{1}{2} - (4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4) = 3$
$\mathbf{E}Z^2 = \mathbf{E}(X^4 - 8X^3 + 16X^2) = \frac{85}{2} - 8\cdot 14 + 16\cdot 5 = \frac{21}{2} = 10.5$
$\mathbf{E}X^4 = 1\cdot\frac{\binom{4}{1}}{16} + 2^4\cdot\frac{\binom{4}{2}}{16} + 3^4\cdot\frac{\binom{4}{3}}{16} + 4^4\cdot\frac{\binom{4}{4}}{16} = \frac{85}{2}$
$\mathbf{E}X^3 = 1\cdot\frac{\binom{4}{1}}{16} + 2^3\cdot\frac{\binom{4}{2}}{16} + 3^3\cdot\frac{\binom{4}{3}}{16} + 4^3\cdot\frac{\binom{4}{4}}{16} = 14$
$\mathbf{E}X^2 = 1\cdot\frac{\binom{4}{1}}{16} + 2^2\cdot\frac{\binom{4}{2}}{16} + 3^2\cdot\frac{\binom{4}{3}}{16} + 4^2\cdot\frac{\binom{4}{4}}{16} = 5$
$\boldsymbol{\sigma}Z = \sqrt{10.5 - 9} = 1.2247$
Második megoldás: $X, Y \in B(4, \frac{1}{2}), X + Y = 4, R_Z = \{0, 3, 4\}$,

$$\mathbf{P}(Z=0) = \mathbf{P}(X=0, Y=4) + \mathbf{P}(X=4, Y=0) = 2\cdot\binom{4}{0}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{P}(Z=3) = \mathbf{P}(X=1, Y=3) + \mathbf{P}(X=3, Y=1) = 2\cdot\binom{4}{1}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(Z=4) = \mathbf{P}(X=2, Y=2) = \binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbf{E}Z = 3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{3}{8} = 3$$

$$\mathbf{E}Z^2 = 9\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot\frac{3}{8} = \frac{21}{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2Z = \frac{21}{2} - 9 = \frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}Z = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247$$

3. Feldobunk egy érmét hatvanszor, jelölje a fejek számát X. Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}(|X-30| \geq 20)$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével!
Megoldás:
$X \in B(60, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbf{E}X = 30, \boldsymbol{\sigma}X = \sqrt{15} \Rightarrow \mathbf{P}(|X-30| \geq 20) \leq \frac{15}{400} = \frac{3}{80} = 0.0375$

4. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{, ha } x, y \in (0,1) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a perem sűrűségfüggvényeket. Függetlenek-e X és Y?
Megoldás: $f_X(x) = f_Y(x) = \int_0^1 \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2)dy = \frac{12}{5}\left[x^2\cdot y - x\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$
$= \frac{12}{5}\cdot(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}, x \in (0,1).$
Mivel $f_X(x)\cdot f_Y(x) \neq f_{X,Y}(x,y)$, így nem függetlenek.

5. Kétszer feldobunk egy kockát. X az egyes, Y a hatos dobások száma.
a.) Adja meg X és Y együttes eloszlását.

b.) Legyen $Z = 3X + 2016$ és $V = 2016 - Y$. Számolja ki Z és V szórását!
Megoldás:

$\diagdown X$ $Y \diagdown$	0	1	2	Y perem
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
X perem	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Mivel $X, Y \in B(2, \frac{1}{6}) \Rightarrow \sigma^2 X = \sigma^2 Y = \mathbf{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$
$\sigma^2 Z = 9 \cdot \sigma^2 X = 2.5 \Rightarrow \sigma Z = \sqrt{2.5} = 1.5811$
$\sigma^2 V = \sigma^2 Y = \frac{5}{18} \Rightarrow \sigma V = \sqrt{\frac{5}{18}} = 0.52705$

6.[IMSC] Legyenek X, Y független, azonos $G(p)$ (geometriai) eloszlású valószínűségi változók. Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Adjuk meg U és V együttes eloszlását és a peremeloszlásokat. Független U és V?
Megoldás: $\mathbf{P}(U = i, V = 0) = \mathbf{P}(X = i, Y = i) = q^{2i-2} \cdot p^2, i = 1, 2, \dots$
$j > 0$: $\mathbf{P}(U = i, V = j) = \mathbf{P}(X = i + j, Y = i) = q^{2i+j-2} \cdot p^2, i, j = 1, 2, \dots$
$j < 0$: $\mathbf{P}(U = i, V = j) = \mathbf{P}(X = i, Y = i - j) = q^{2i-j-2} \cdot p^2, i, -j = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(U = i) = \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = i) + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2 \cdot \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = j) =$$

$$= q^{2i-2} \cdot p^2 + 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} q^{i+j-2} \cdot p^2 = q^{2i-2} \cdot p^2 + 2 \cdot p \cdot q^{2i-1} = q^{2i-2} \cdot p(1 + q)$$

$$\mathbf{P}(V = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}$$

$$j > 0 : \mathbf{P}(V = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = i + j, Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i+j-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot q^j \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{p \cdot q^j}{1+q}$$

$$j < 0 : \mathbf{P}(V = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = i, Y = i - j) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i-j-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot q^{-j} \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{p \cdot q^{-j}}{1+q}$$

Igen, U és V függetlenek, mert $\mathbf{P}(U = i, V = j) = \mathbf{P}(U = i) \cdot \mathbf{P}(V = j)$!